



Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyższego

**Regionalna Inicjatywa Doskonałości w Dyscyplinach
Informatyki, Elektrotechniki, Elektroniki, Automatyki i Robotyki
na Politechnice Częstochowskiej**



Projekt w ramach programu Regionalna Inicjatywa Doskonałości, decyzja nr 020/RID/2018/19

Programowanie równoległe z wykorzystaniem współczesnych architektur komputerowych z pamięcią współdzieloną

Dr hab. inż. Łukasz Szustak
lszustak@icis.pcz.pl

Dr inż. Kamil Halbiniak
khalbniak@icis.pcz.pl

Politechnika Częstochowska

Programowanie równoległe z wykorzystaniem współczesnych architektur komputerowych z pamięcią współdzieloną

1. Wprowadzenie do współczesnych architektur komputerowych oraz programowania równoległego
2. Przegląd modeli i standardów programowania równoległego z pamięcią współdzieloną
3. Środowisko OpenMP programowania maszyn z pamięcią wspólną, w tym procesorów wielordzeniowych
4. Zrównoleglanie pętli oraz równoważenie obciążenia w systemach równoległych z pamięcią współdzieloną
5. Zrównoleglanie programów z wykorzystaniem modelu typu data parallelism
6. Zrównoleglanie programów z wykorzystaniem modelu typu task parallelism
7. Mapowanie obliczeń w hybrydowych systemach komputerowych z akceleratorami
8. Przykłady zrównoleglania obliczeń numerycznych

Programowanie równoległe z wykorzystaniem współczesnych architektur komputerowych z pamięcią współdzieloną

1. Wprowadzenie do współczesnych architektur komputerowych oraz programowania równoległego
2. Przegląd modeli i standardów programowania równoległego z pamięcią współdzieloną
3. Środowisko OpenMP programowania maszyn z pamięcią wspólną, w tym procesorów wielordzeniowych
4. Zrównoleglanie pętli oraz równoważenie obciążenia w systemach równoległych z pamięcią współdzieloną
5. Zrównoleglanie programów z wykorzystaniem modelu typu data parallelism
6. Zrównoleglanie programów z wykorzystaniem modelu typu task parallelism
7. Mapowanie obliczeń w hybrydowych systemach komputerowych z akceleratorami
- 8. Przykłady zrównoleglania obliczeń numerycznych**



Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyższego

**Regionalna Inicjatywa Doskonałości w Dyscyplinach
Informatyki, Elektrotechniki, Elektroniki, Automatyki i Robotyki
na Politechnice Częstochowskiej**



Projekt w ramach programu Regionalna Inicjatywa Doskonałości, decyzja nr 020/RID/2018/19

Temat nr 8
**Przykłady zrównoleglania obliczeń
numerycznych**

Dr hab. inż. Łukasz Szustak
lszustak@icis.pcz.pl

Politechnika Częstochowska

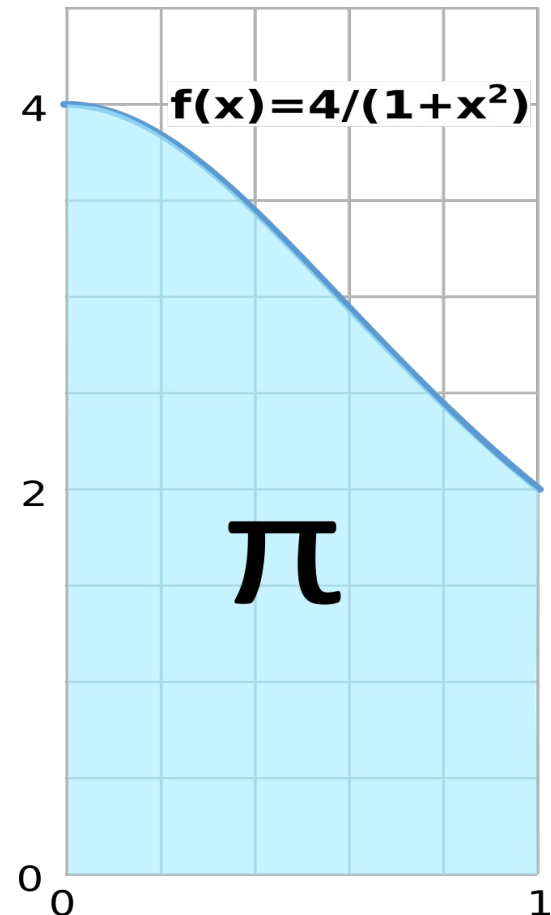
Wyznaczanie liczby π

Wyznaczanie liczby Pi

- Liczba Pi jest używana w matematyce do wielu różnych obliczeń
- Wartość Pi można wyznaczyć obliczając wartość całki oznaczonej przedstawionej poniżej

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx = \pi$$

- Wartość Pi można również wyznaczyć obliczając powyższą całkę w sposób numeryczny

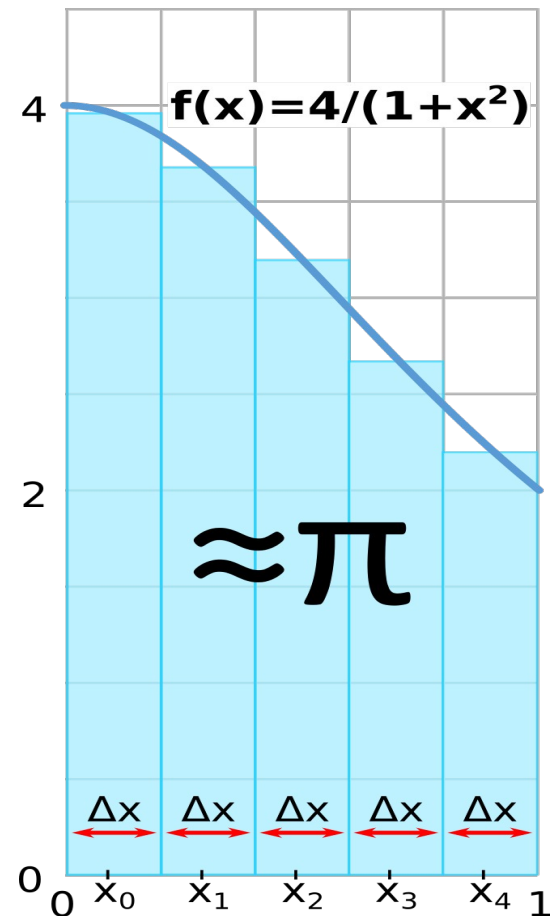


Wyznaczanie liczby Pi

- Metoda punktów środkowych jako rozszerzenie metody prostokątów jest jedną z najprostszych metod całkowania numerycznego
- Polega ona na przybliżeniu pola całki wyznaczając sumę pól prostokątów:

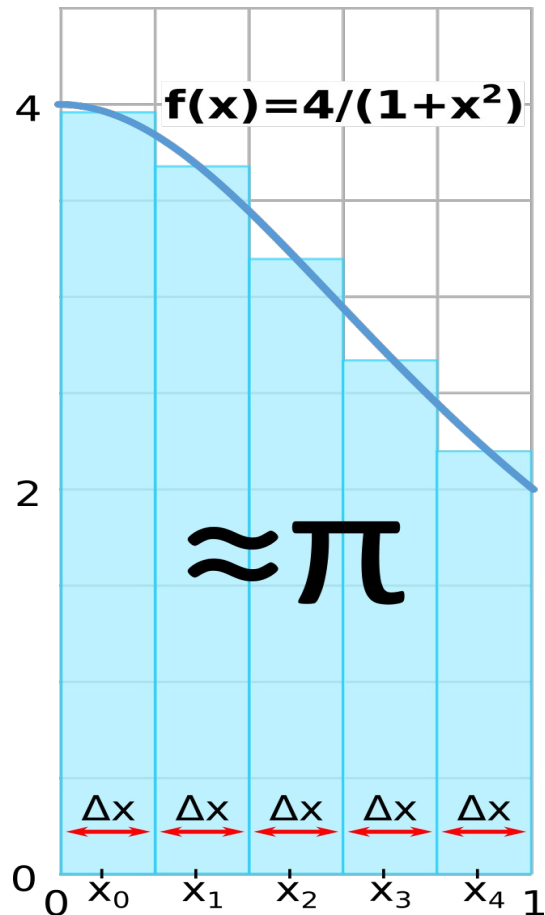
$$\sum_{i=0}^{N-1} F(x_i) \Delta x \approx \pi$$

- gdzie Δx oznacza szerokość prostokąta, natomiast $F(x_i)$ wysokość wyznaczaną w środku szerokości prostokąta



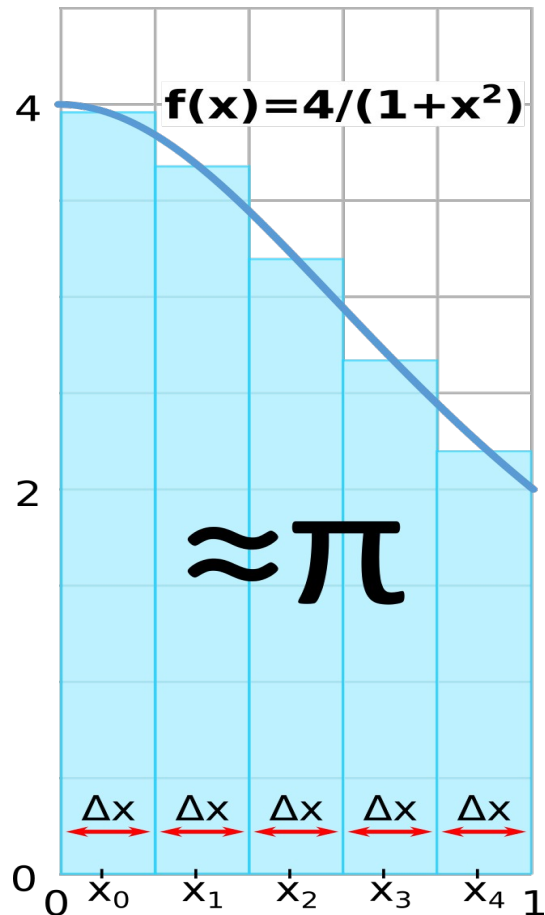
Wyznaczanie liczby Pi

```
double getPI(const unsigned int steps ) {  
    double pi;  
    double xi;  
    double suma = 0.0;  
    const double dx = 1.0/(double) steps;  
    for (unsigned int i=0; i<steps; ++i) {  
        xi = ((double)i+0.5)*dx;  
        suma = suma + 4.0 / (1.0+xi*xi);  
    }  
    pi = dx * suma;  
    return pi;  
}
```



Wyznaczanie liczby Pi

```
double getPI(const unsigned int steps ) {  
    double pi;  
    double xi;  
    double suma = 0.0;  
    const double dx = 1.0/(double) steps;  
    #pragma omp simd reduction(+:suma) private(xi)  
    for (unsigned int i=0; i<steps; ++i) {  
        xi = ((double)i+0.5)*dx;  
        suma = suma + 4.0 / (1.0+xi*xi);  
    }  
    pi = dx * suma;  
    return pi;  
}
```



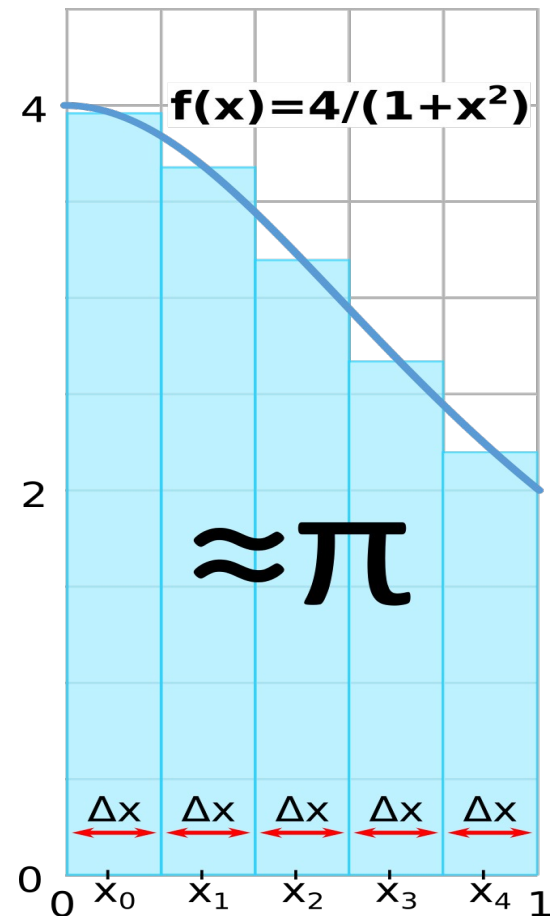
Wyznaczanie liczby Pi

```
double getPI(const unsigned int steps ) {  
    double pi;  
    double xi;  
    double suma = 0.0;  
    const double dx = 1.0/(double) steps;  
    #pragma omp simd reduction(+:suma) private(xi)  
    for (unsigned int i = 0; i < steps; i++)  
        xi = ((double)i+0.5)*dx;  
        suma = suma + 4.0/(1.0+xi*xi);  
    }  
    pi = dx * suma;  
    return pi;  
}
```

Wyniki wydajnościowe

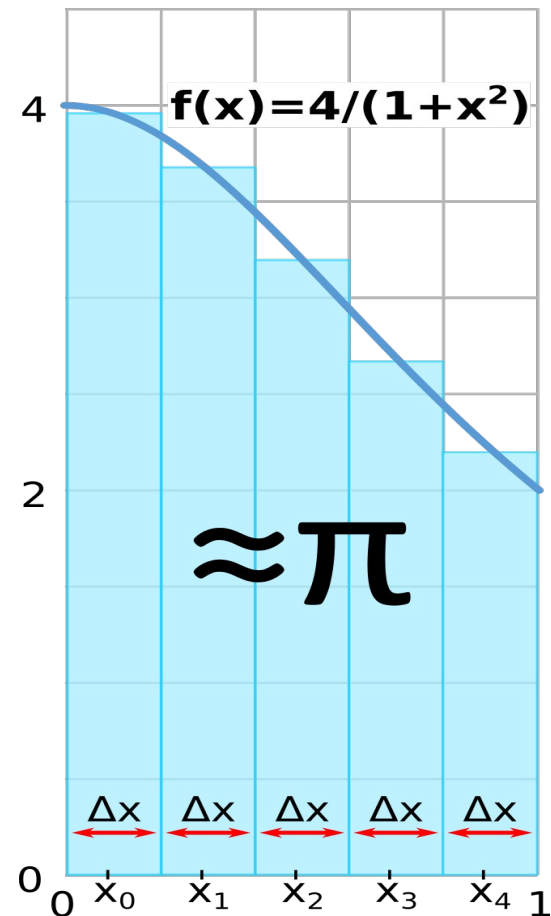
	Time [s]	Speedup
1 core noSIMD	18.85	--
1 core AVX512	1.27	14.82

*Intel Xeon Gold 6240, 18 rdzeni, AVX-512, g++ 9.2

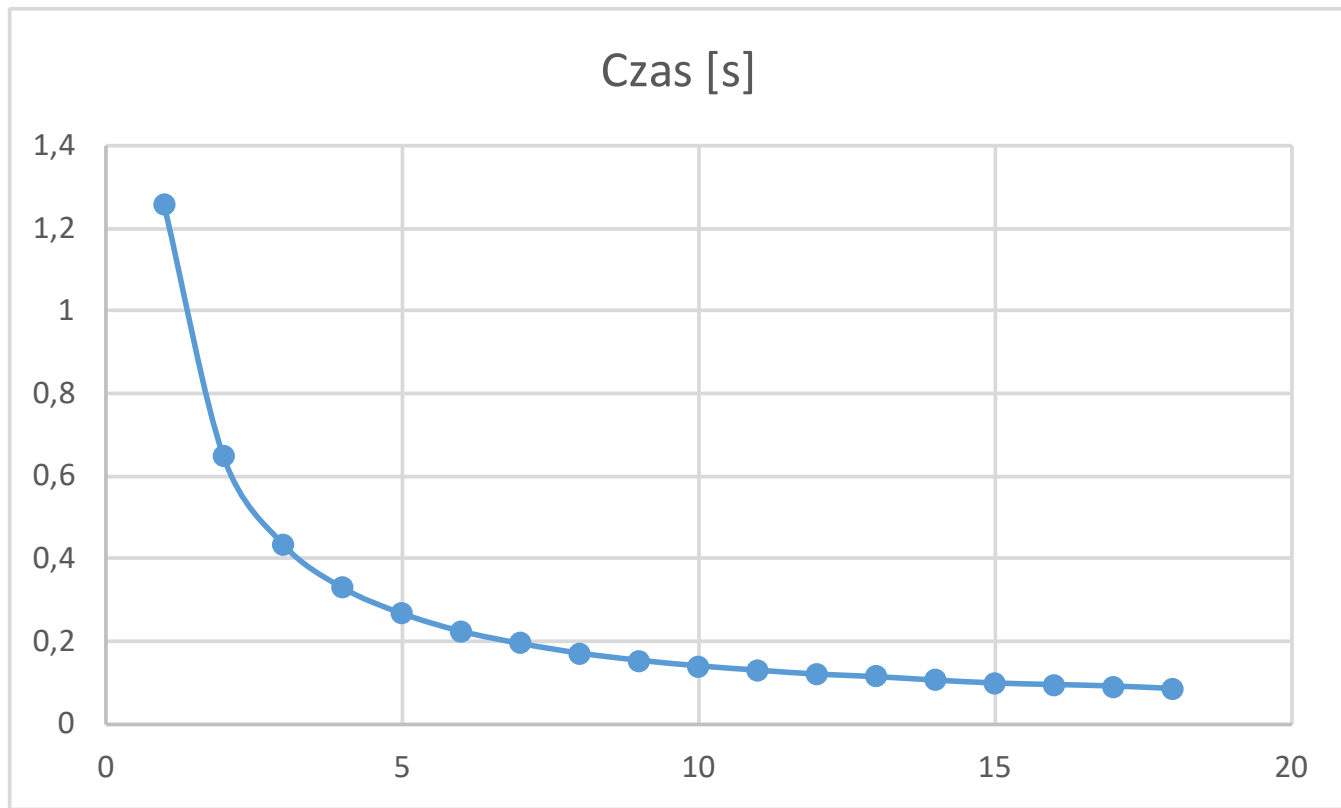


Wyznaczanie liczby Pi

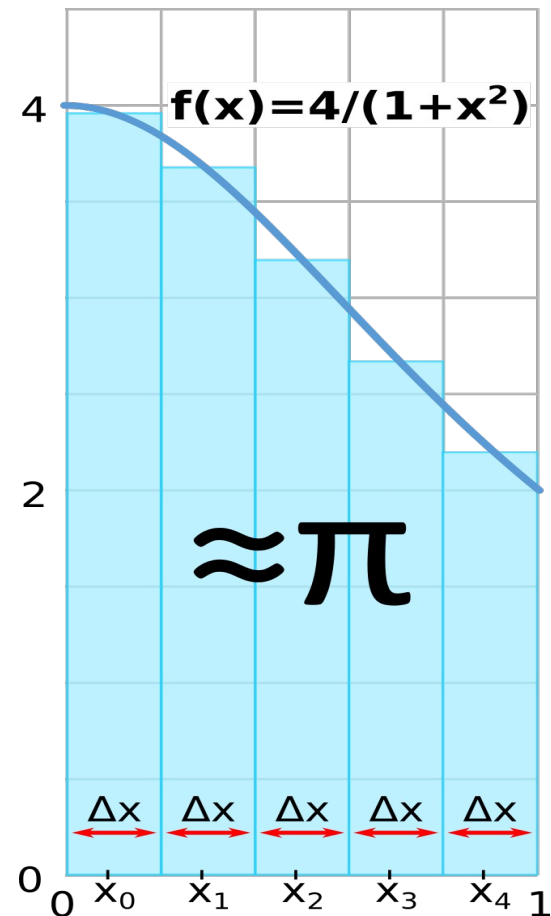
```
double getPI(const unsigned int steps ) {  
    double pi;  
    double xi;  
    double suma = 0.0;  
    const double dx = 1.0/(double) steps;  
    #pragma omp parallel for simd reduction(+:suma) private(xi)  
    for (unsigned int i=0; i<steps; ++i) {  
        xi = ((double)i+0.5)*dx;  
        suma = suma + 4.0 / (1.0+xi*xi);  
    }  
    pi = dx * suma;  
    return pi;  
}
```



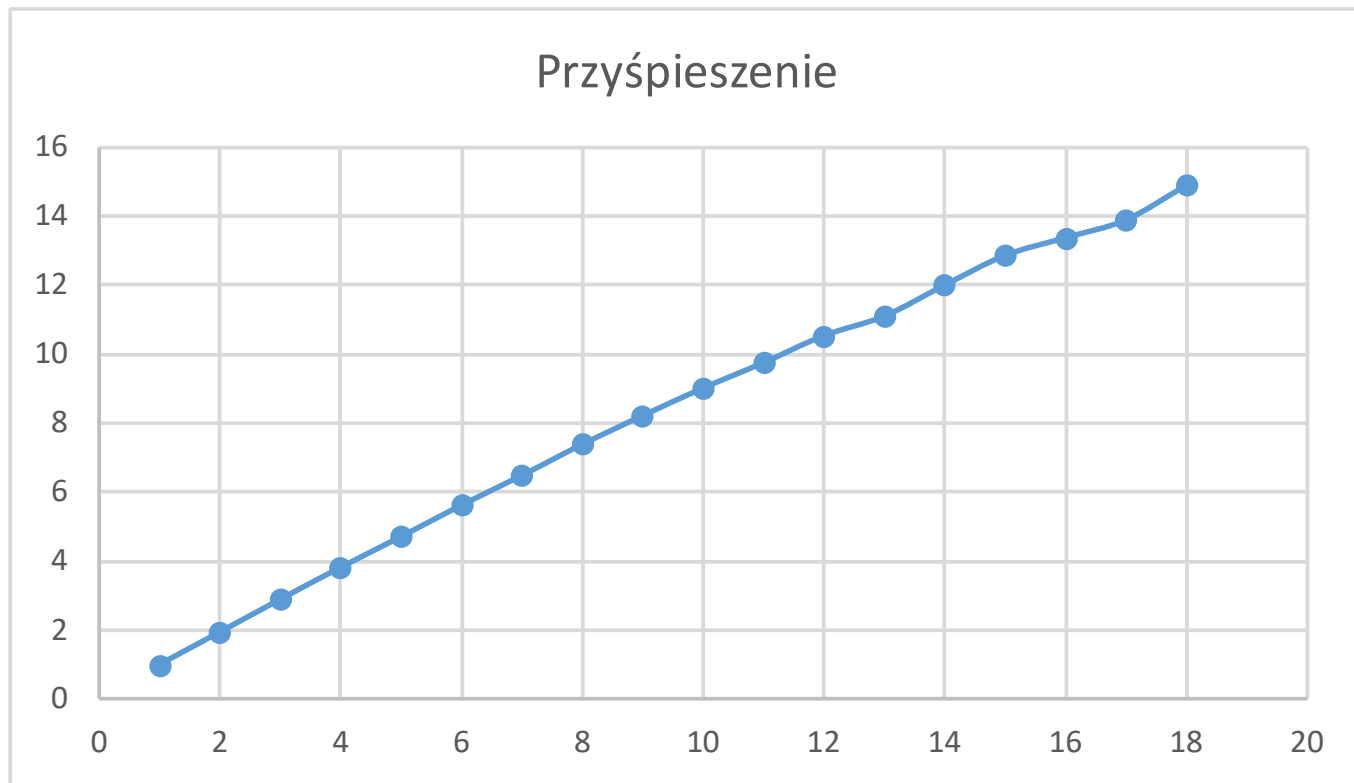
Wyniki wydajnościowe



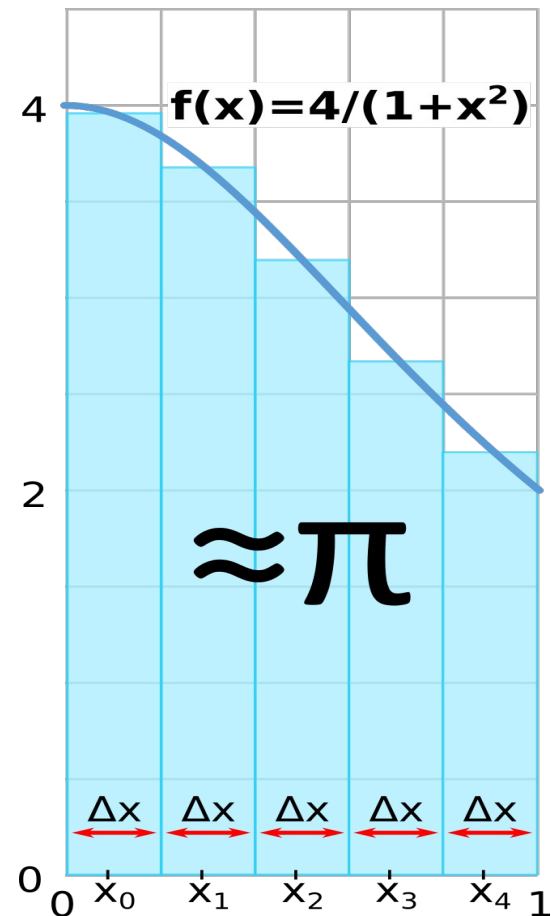
*Intel Xeon Gold 6240, 18 rdzeni, AVX-512, g++ 9.2



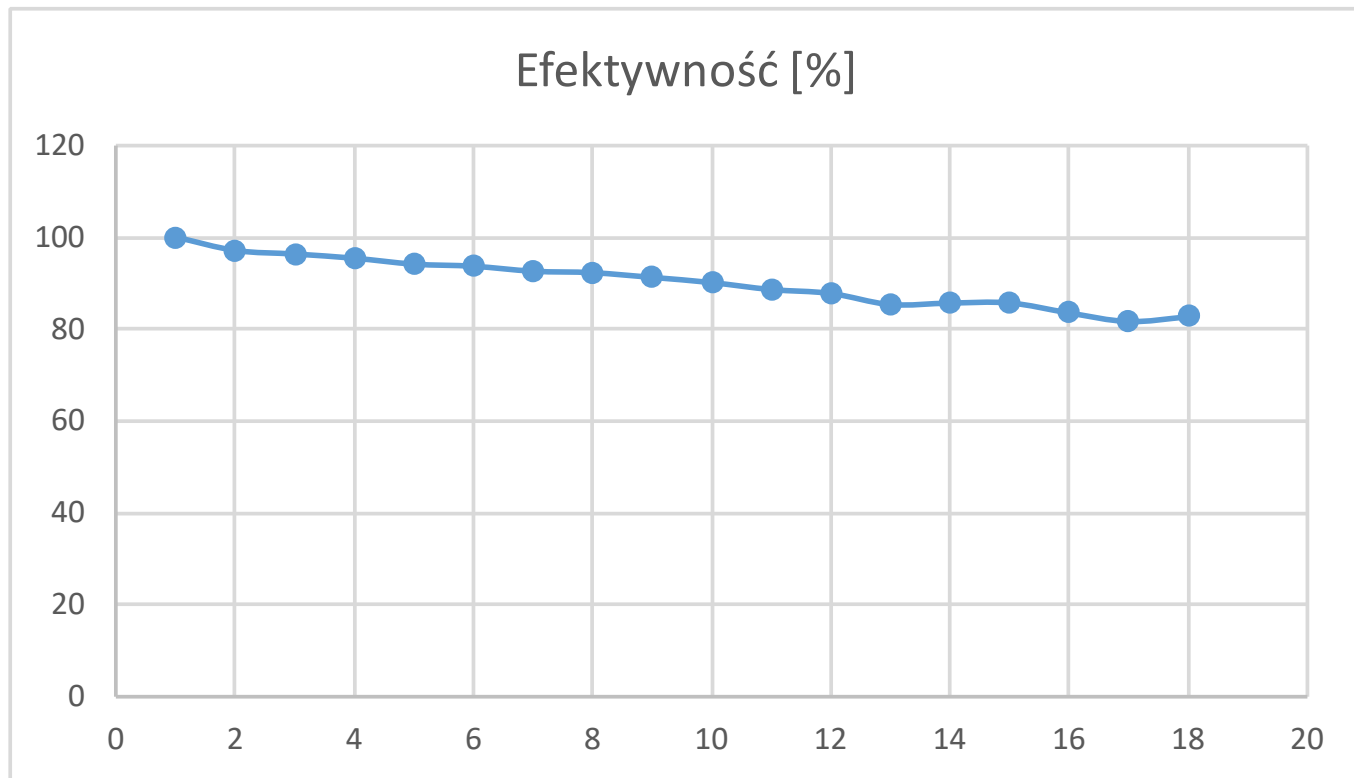
Wyniki wydajnościowe



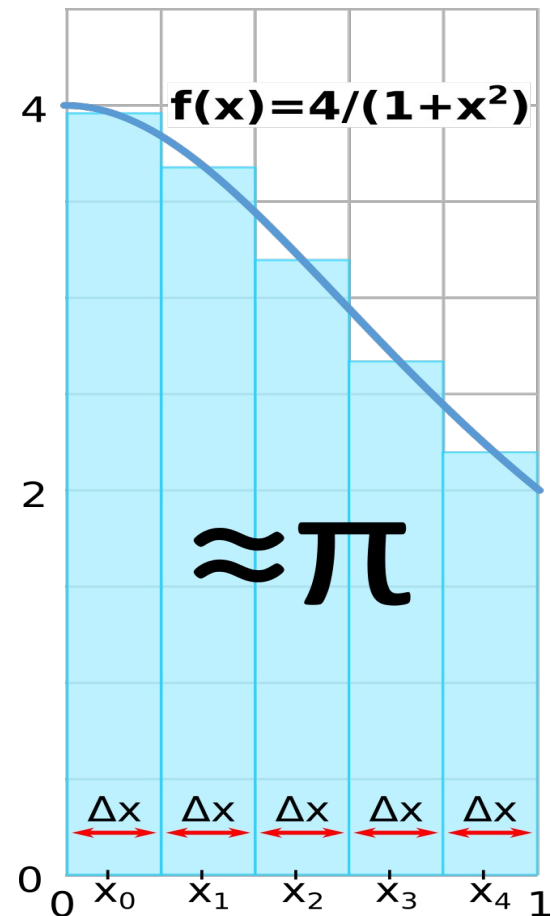
*Intel Xeon Gold 6240, 18 rdzeni, AVX-512, g++ 9.2



Wyniki wydajnościowe



*Intel Xeon Gold 6240, 18 rdzeni, AVX-512, g++ 9.2



Mnożenie macierzy

Mnożenie macierzy

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

```
for(int i=0; i<n; i++)  
    for(int j=0; j<n; j++)  
        for(int k=0; k<n; k++)  
            c[i*n+j] += a[i*n+k]*b[k*n+j];
```

Mnożenie macierzy

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

```
for(int i=0; i<n; i++)  
    for(int j=0; j<n; j++)  
        for(int k=0; k<n; k++)  
            c[i][j] += a[i][k]*b[k][j];
```

Mnożenie macierzy

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

```
for(int i=0; i<n; i++)  
    for(int j=0; j<n; j++)  
        for(int k=0; k<n; k++)  
            c[i][j] += a[i][k]*b[k][j];
```

Mnożenie macierzy

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

```
for(int i=0; i<n; i++)  
    for(int j=0; j<n; j++)  
        for(int k=0; k<n; k++)  
            c[i][j] += a[i][k]*b[k][j];
```

Mnożenie macierzy

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

i=1, j=1

```
for(int i=0; i<n; i++)  
  for(int j=0; j<n; j++)  
    for(int k=0; k<n; k++)  
      c[i][j] += a[i][k]*b[k][j];
```

Mnożenie macierzy

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

i=1, j=1, k=0

```
for(int i=0; i<n; i++)  
  for(int j=0; j<n; j++)  
    for(int k=0; k<n; k++)  
      c[i][j] += a[i][k]*b[k][j];
```

Mnożenie macierzy

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$i=1, j=1, k=0 \longrightarrow C_{11} = C_{11} + A_{10} * B_{01}$$

```
for(int i=0; i<n; i++)  
  for(int j=0; j<n; j++)  
    for(int k=0; k<n; k++)  
      c[i][j] += a[i][k]*b[k][j];
```

Mnożenie macierzy

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} i=1, j=1, k=0 & \longrightarrow C_{11} = C_{11} + A_{10} * B_{01} \\ i=1, j=1, k=1 & \longrightarrow C_{11} = C_{11} + A_{11} * B_{11} \end{array}$$

```
for(int i=0; i<n; i++)  
  for(int j=0; j<n; j++)  
    for(int k=0; k<n; k++)  
      c[i][j] += a[i][k]*b[k][j];
```

Mnożenie macierzy

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} i=1, j=1, k=0 & \longrightarrow C_{11} = C_{11} + A_{10} * B_{01} \\ i=1, j=1, k=1 & \longrightarrow C_{11} = C_{11} + A_{11} * B_{11} \\ i=1, j=1, k=2 & \longrightarrow C_{11} = C_{11} + A_{12} * B_{21} \end{array}$$

```
for(int i=0; i<n; i++)  
  for(int j=0; j<n; j++)  
    for(int k=0; k<n; k++)  
      c[i][j] += a[i][k]*b[k][j];
```

Mnożenie macierzy

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} i=1, j=1, k=0 & \longrightarrow C_{11} = C_{11} + A_{10} * B_{01} \\ i=1, j=1, k=1 & \longrightarrow C_{11} = C_{11} + A_{11} * B_{11} \\ i=1, j=1, k=2 & \longrightarrow C_{11} = C_{11} + A_{12} * B_{21} \\ i=1, j=1, k=3 & \longrightarrow C_{11} = C_{11} + A_{13} * B_{31} \end{array}$$

```
for(int i=0; i<n; i++)
```

```
    for(int j=0; j<n; j++)
```

```
        for(int k=0; k<n; k++)
```

```
            c[i][j] += a[i][k]*b[k][j];
```

Mnożenie macierzy

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} i=1, j=1, k=0 & \longrightarrow C_{11} = C_{11} + A_{10} * B_{01} \\ i=1, j=1, k=1 & \longrightarrow C_{11} = C_{11} + A_{11} * B_{11} \\ i=1, j=1, k=2 & \longrightarrow C_{11} = C_{11} + A_{12} * B_{21} \\ i=1, j=1, k=3 & \longrightarrow C_{11} = C_{11} + A_{13} * B_{31} \end{array}$$

```
for(int i=0; i<n; i++)
```

```
    for(int j=0; j<n; j++)
```

```
        for(int k=0; k<n; k++)
```

```
            c[i][j] += a[i][k]*b[k][j];
```

Mnożenie macierzy

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

```
for(int i=0; i<n; i++)  
  for(int j=0; j<n; j++)  
    for(int k=0; k<n; k++)  
      c[i][j] += a[i][k]*b[k][j];
```

dla $i=1, j=1$

$$C_{11} = A_{10} * B_{01} + A_{11} * B_{11} + A_{12} * B_{21} + A_{13} * B_{31}$$

Organizacja danych w pamięci

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Organizacja danych w pamięci

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Wiersz nr 1

Organizacja danych w pamięci

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Wiersz nr 1

Wiersz nr 2

Organizacja danych w pamięci

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Wiersz nr 1

Wiersz nr 2

Wiersz nr 3

Organizacja danych w pamięci

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Wiersz nr 1

Wiersz nr 2

Wiersz nr 3

Wiersz nr 4

Organizacja danych w pamięci

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Wiersz nr 1

Wiersz nr 2

Wiersz nr 3

Wiersz nr 4

Organizacja danych w pamięci

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Wiersz nr 1

Wiersz nr 2

Wiersz nr 3

Wiersz nr 4

Wiersz nr 1

Organizacja danych w pamięci

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Wiersz nr 1

Wiersz nr 2

Wiersz nr 3

Wiersz nr 4

Wiersz nr 1

Wiersz nr 2

Organizacja danych w pamięci

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Wiersz nr 1

Wiersz nr 2

Wiersz nr 3

Wiersz nr 4

Wiersz nr 1

Wiersz nr 2

Wiersz nr 3

Organizacja danych w pamięci

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Wiersz nr 1

Wiersz nr 2

Wiersz nr 3

Wiersz nr 4

Wiersz nr 1

Wiersz nr 2

Wiersz nr 3

Wiersz nr 4

Organizacja danych w pamięci

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Wiersz nr 1

Wiersz nr 2

Wiersz nr 3

Wiersz nr 4

Wiersz nr 1

Wiersz nr 2

Wiersz nr 3

Wiersz nr 4

Organizacja danych w pamięci

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Wiersz nr 1

Wiersz nr 2

Wiersz nr 3

Wiersz nr 4

Wiersz nr 1

Wiersz nr 2

Wiersz nr 3

Wiersz nr 4

Wiersz nr 1

Organizacja danych w pamięci

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Wiersz nr 1

Wiersz nr 2

Wiersz nr 3

Wiersz nr 4

Wiersz nr 1

Wiersz nr 2

Wiersz nr 3

Wiersz nr 4

Wiersz nr 1

Wiersz nr 2

Organizacja danych w pamięci

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Wiersz nr 1

Wiersz nr 2

Wiersz nr 3

Wiersz nr 4

Wiersz nr 1

Wiersz nr 2

Wiersz nr 3

Wiersz nr 4

Wiersz nr 1

Wiersz nr 2

Wiersz nr 3

Organizacja danych w pamięci

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Wiersz nr 1

Wiersz nr 2

Wiersz nr 3

Wiersz nr 4

Wiersz nr 1

Wiersz nr 2

Wiersz nr 3

Wiersz nr 4

Wiersz nr 1

Wiersz nr 2

Wiersz nr 3

Wiersz nr 4

Organizacja danych w pamięci

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Wiersz nr 1

Wiersz nr 2

Wiersz nr 3

Wiersz nr 4

Wiersz nr 1

Wiersz nr 2

Wiersz nr 3

Wiersz nr 4

Wiersz nr 1

Wiersz nr 2

Wiersz nr 3

Wiersz nr 4

Organizacja danych w pamięci

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Wiersz nr 1

Wiersz nr 2

Wiersz nr 3

Wiersz nr 4

Wiersz nr 1

Wiersz nr 2

Wiersz nr 3

Wiersz nr 4

Wiersz nr 1

Wiersz nr 2

Wiersz nr 3

Wiersz nr 4

Organizacja danych w pamięci

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Wiersz nr 1

A_{10}

A_{11}

A_{12}

A_{13}

Wiersz nr 3

Wiersz nr 4

Wiersz nr 1

Wiersz nr 2

Wiersz nr 3

Wiersz nr 4

Wiersz nr 1

Wiersz nr 2

Wiersz nr 3

Wiersz nr 4

Organizacja danych w pamięci

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Wiersz nr 1

A_{10} A_{11} A_{12} A_{13}

Wiersz nr 3

Wiersz nr 4

B_{01} sz nr 1

B_{11} sz nr 2

B_{21} sz nr 3

B_{31} sz nr 4

Wiersz nr 1

Wiersz nr 2

Wiersz nr 3

Wiersz nr 4

Organizacja danych w pamięci

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Wiersz nr 1

A_{10} A_{11} A_{12} A_{13}

Wiersz nr 3

Wiersz nr 4

W B_{01} sz nr 1

W B_{11} sz nr 2

W B_{21} sz nr 3

W B_{31} sz nr 4

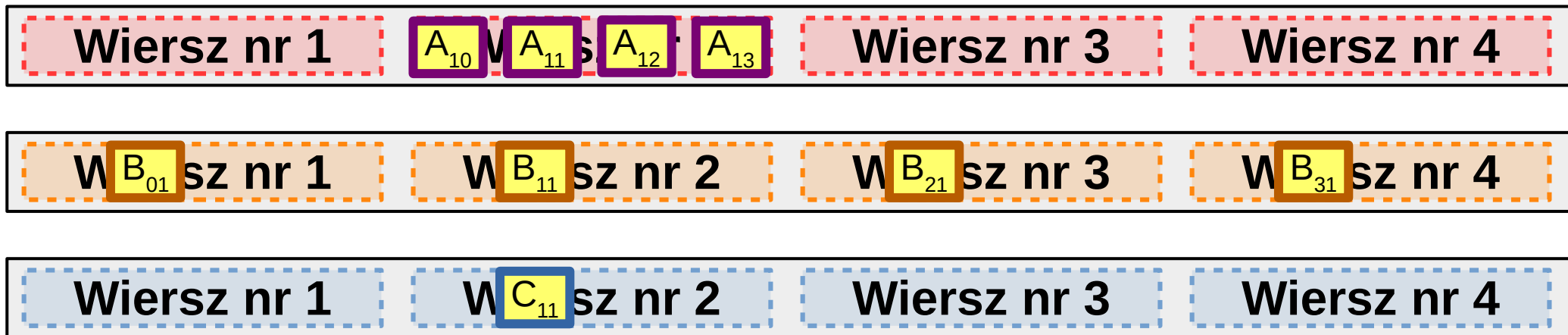
Wiersz nr 1

W C_{11} sz nr 2

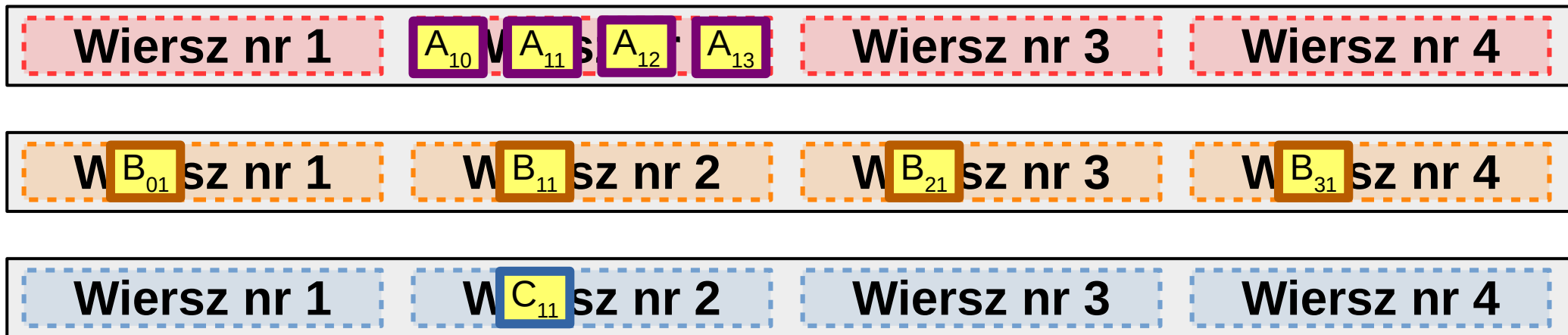
Wiersz nr 3

Wiersz nr 4

Organizacja danych w pamięci

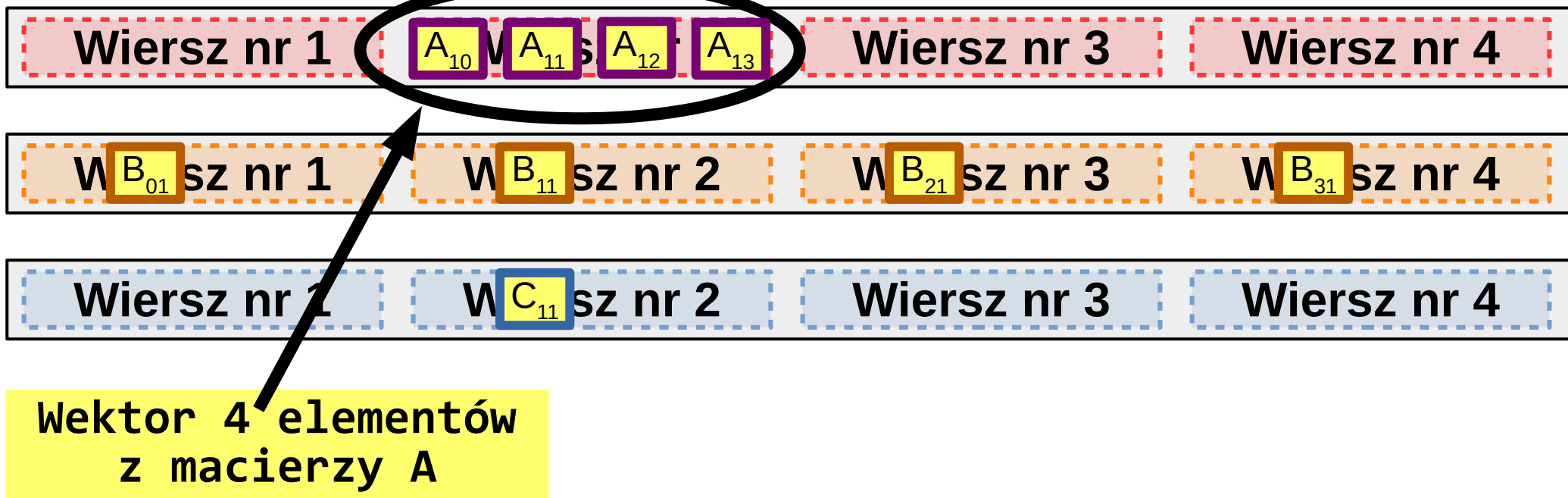


Organizacja danych w pamięci



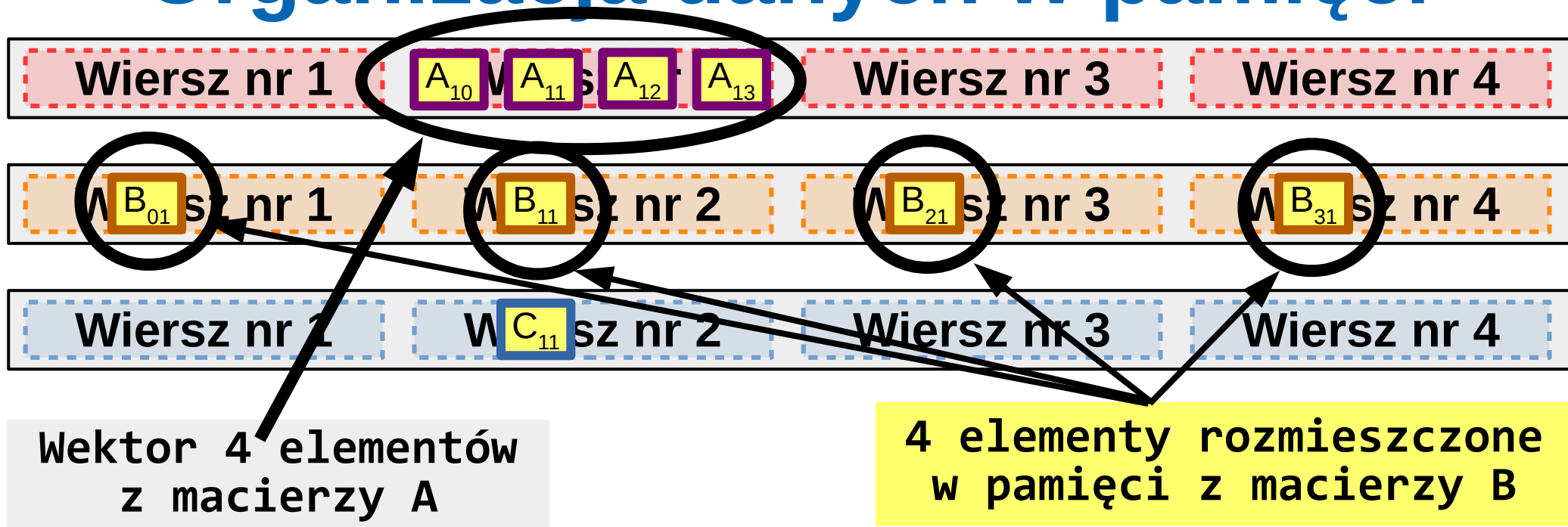
```
i=1 for(int k=0; k<n; k++)  
j=1   c[i][j] += a[i][k] * b[i][j];
```

Organizacja danych w pamięci



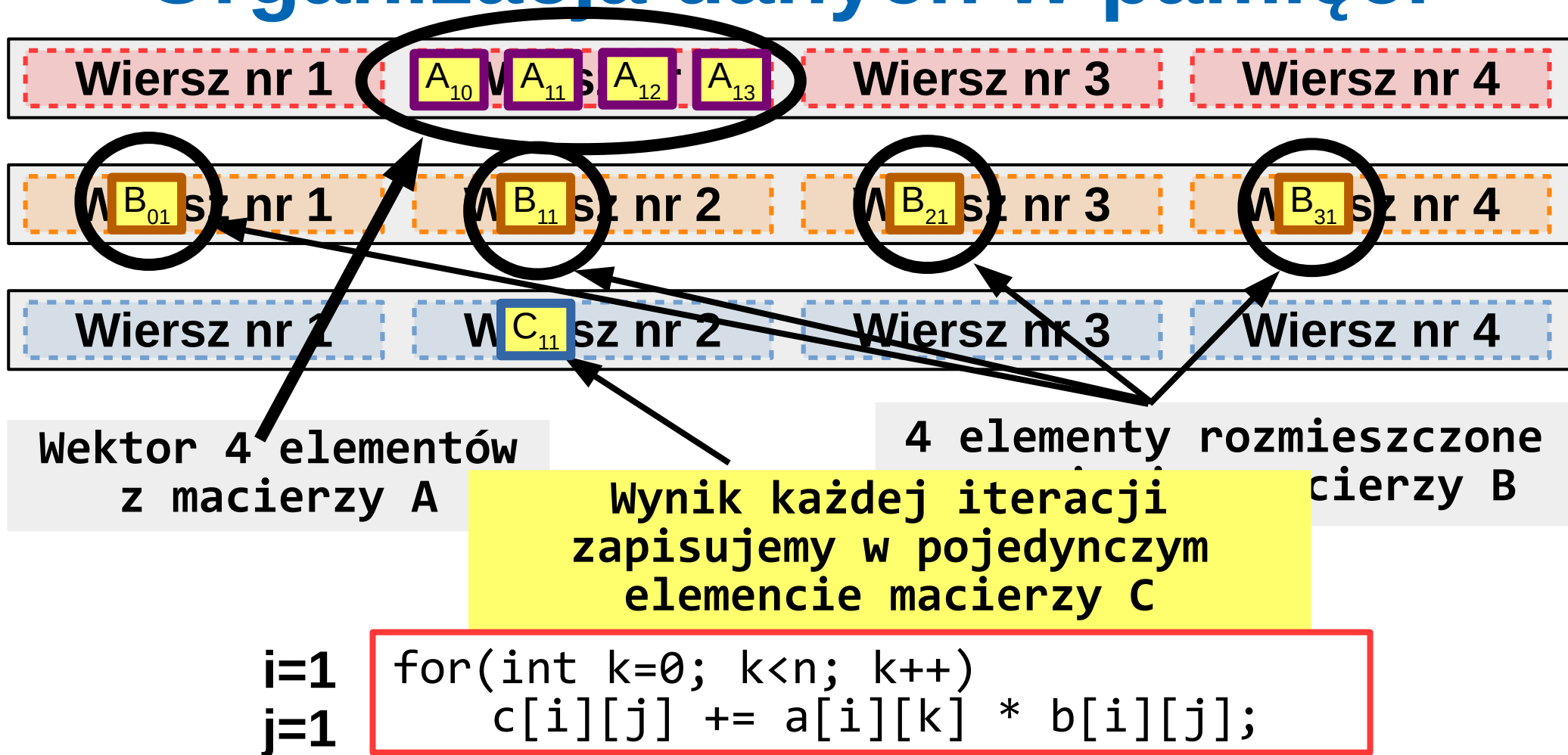
```
i=1 for(int k=0; k<n; k++)  
j=1   c[i][j] += a[i][k] * b[i][j];
```

Organizacja danych w pamięci



```
i=1 for(int k=0; k<n; k++)  
j=1   c[i][j] += a[i][k] * b[i][j];
```

Organizacja danych w pamięci



Mnożenie macierzy – reorganizacja

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

```
for(int i=0; i<n; i++)  
    for(int j=0; j<n; j++)  
        for(int k=0; k<n; k++)  
            c[i][j] += a[i][k]*b[k][j];
```

Mnożenie macierzy – reorganizacja

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

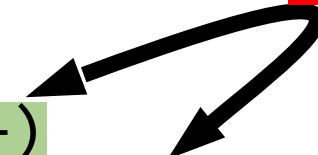
```
for(int i=0; i<n; i++)  
    for(int j=0; j<n; j++)  
        for(int k=0; k<n; k++)  
            c[i][j] += a[i][k]*b[k][j];
```

Mnożenie macierzy – reorganizacja

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Zamiana kolejności pętli
z **ijk** na ikj

```
for(int i=0; i<n; i++)  
  for(int j=0; j<n; j++)  
    for(int k=0; k<n; k++)  
      c[i][j] += a[i][k]*b[k][j];
```

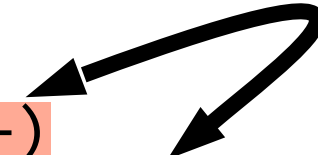


Mnożenie macierzy – reorganizacja

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Zamiana kolejności pętli
z ijk na **ikj**

```
for(int i=0; i<n; i++)  
  for(int k=0; k<n; k++)  
    for(int j=0; j<n; j++)  
      c[i][j] += a[i][k]*b[k][j];
```



Mnożenie macierzy – reorganizacja

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

```
for(int i=0; i<n; i++)  
  for(int k=0; k<n; k++)  
    for(int j=0; j<n; j++)  
      c[i][j] += a[i][k]*b[k][j];
```

Mnożenie macierzy – reorganizacja

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

i=1, k=1,

```
for(int i=0; i<n; i++)  
  for(int k=0; k<n; k++)  
    for(int j=0; j<n; j++)  
      c[i][j] += a[i][k]*b[k][j];
```

Mnożenie macierzy – reorganizacja

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

i=1, k=1, j=0

```
for(int i=0; i<n; i++)  
  for(int k=0; k<n; k++)  
    for(int j=0; j<n; j++)  
      c[i][j] += a[i][k]*b[k][j];
```

Mnożenie macierzy – reorganizacja

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$i=1, k=1, j=0 \longrightarrow C_{10} = C_{10} + A_{11} * B_{10}$$

```
for(int i=0; i<n; i++)  
  for(int k=0; k<n; k++)  
    for(int j=0; j<n; j++)  
      c[i][j] += a[i][k]*b[k][j];
```

Mnożenie macierzy – reorganizacja

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} i=1, k=1, j=0 \\ i=1, k=1, j=1 \end{array} \longrightarrow$$

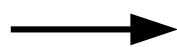
$$\begin{array}{l} C_{10} = C_{10} + A_{11} * B_{10} \\ C_{11} = C_{11} + A_{11} * B_{11} \end{array}$$

```
for(int i=0; i<n; i++)  
  for(int k=0; k<n; k++)  
    for(int j=0; j<n; j++)  
      c[i][j] += a[i][k]*b[k][j];
```

Mnożenie macierzy – reorganizacja

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$i=1, k=1, j=0$
 $i=1, k=1, j=1$
 $i=1, k=1, j=2$



$$\begin{aligned} C_{10} &= C_{10} + A_{11} * B_{10} \\ C_{11} &= C_{11} + A_{11} * B_{11} \\ C_{12} &= C_{12} + A_{11} * B_{12} \end{aligned}$$

```
for(int i=0; i<n; i++)  
  for(int k=0; k<n; k++)  
    for(int j=0; j<n; j++)  
      c[i][j] += a[i][k]*b[k][j];
```

Mnożenie macierzy – reorganizacja

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$i=1, k=1, j=0$
 $i=1, k=1, j=1$
 $i=1, k=1, j=2$
 $i=1, k=1, j=3$



$$\begin{aligned} C_{10} &= C_{10} + A_{11} * B_{10} \\ C_{11} &= C_{11} + A_{11} * B_{11} \\ C_{12} &= C_{12} + A_{11} * B_{12} \\ C_{13} &= C_{13} + A_{11} * B_{13} \end{aligned}$$

```
for(int i=0; i<n; i++)
```

```
    for(int k=0; k<n; k++)
```

```
        for(int j=0; j<n; j++)
```

```
            c[i][j] += a[i][k]*b[k][j];
```

Mnożenie macierzy – reorganizacja

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} i=1, k=1, j=0 & \longrightarrow C_{10} = C_{10} + A_{11} * B_{10} \\ i=1, k=1, j=1 & \longrightarrow C_{11} = C_{11} + A_{11} * B_{11} \\ i=1, k=1, j=2 & \longrightarrow C_{12} = C_{12} + A_{11} * B_{12} \\ i=1, k=1, j=3 & \longrightarrow C_{13} = C_{13} + A_{11} * B_{13} \end{array}$$

```
for(int i=0; i<n; i++)
```

```
    for(int k=0; k<n; k++)
```

```
        for(int j=0; j<n; j++)
```

```
            c[i][j] += a[i][k]*b[k][j];
```

Organizacja danych w pamięci

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Wiersz nr 1

Wiersz nr 2

Wiersz nr 3

Wiersz nr 4

Wiersz nr 1

Wiersz nr 2

Wiersz nr 3

Wiersz nr 4

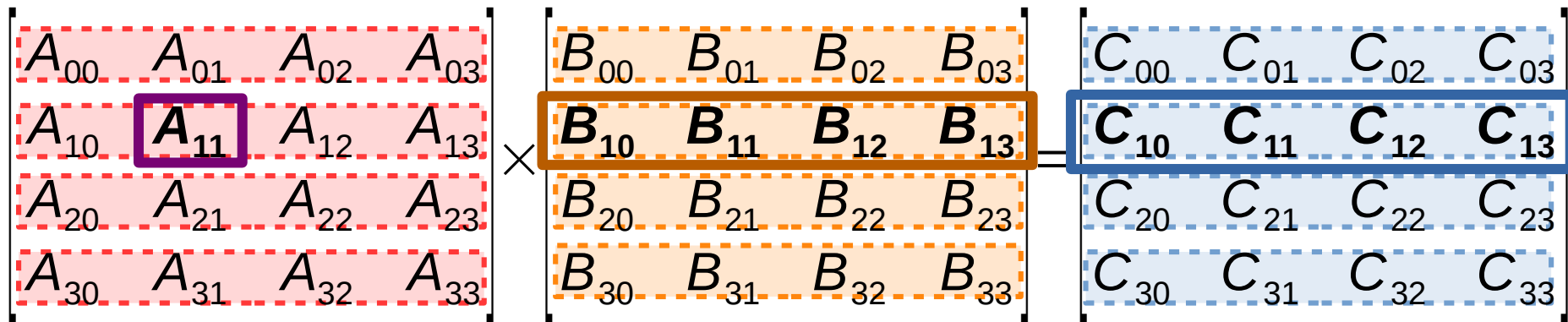
Wiersz nr 1

Wiersz nr 2

Wiersz nr 3

Wiersz nr 4

Organizacja danych w pamięci



Wiersz nr 1

Wiersz nr 2

Wiersz nr 3

Wiersz nr 4

Wiersz nr 1

Wiersz nr 2

Wiersz nr 3

Wiersz nr 4

Wiersz nr 1

Wiersz nr 2

Wiersz nr 3

Wiersz nr 4

Organizacja danych w pamięci

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & \boxed{A_{11}} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ \boxed{B_{10}} & \boxed{B_{11}} & \boxed{B_{12}} & \boxed{B_{13}} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ \boxed{C_{10}} & \boxed{C_{11}} & \boxed{C_{12}} & \boxed{C_{13}} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Wiersz nr 1

Wiersz nr 2

Wiersz nr 3

Wiersz nr 4

Wiersz nr 1

B_{10} B_{11} B_{12} B_{13}

Wiersz nr 3

Wiersz nr 4

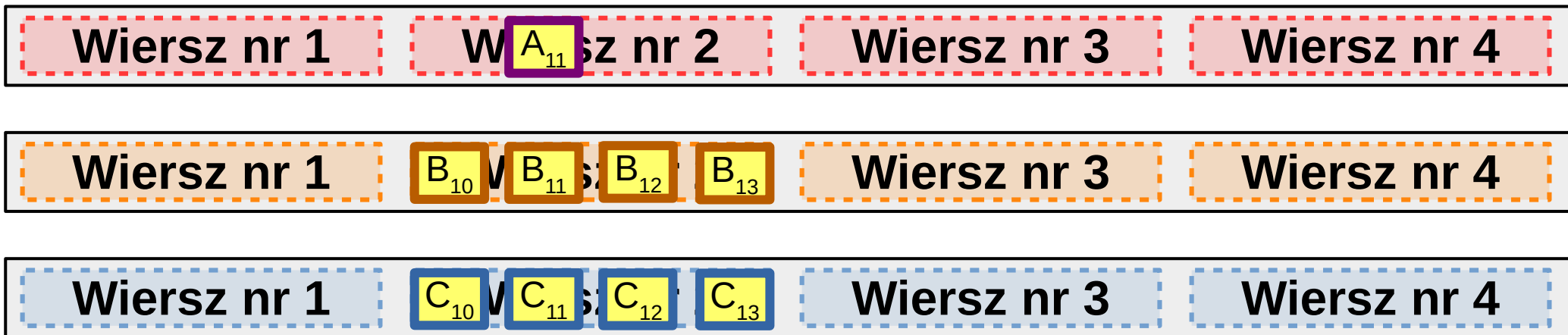
Wiersz nr 1

C_{10} C_{11} C_{12} C_{13}

Wiersz nr 3

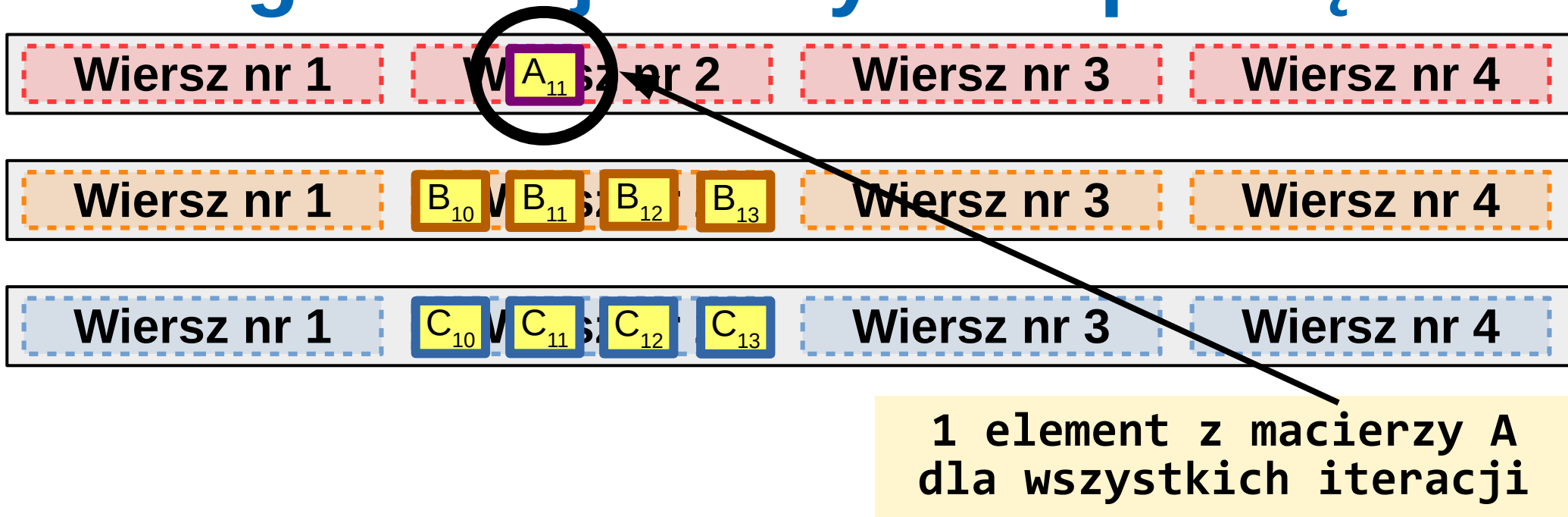
Wiersz nr 4

Organizacja danych w pamięci



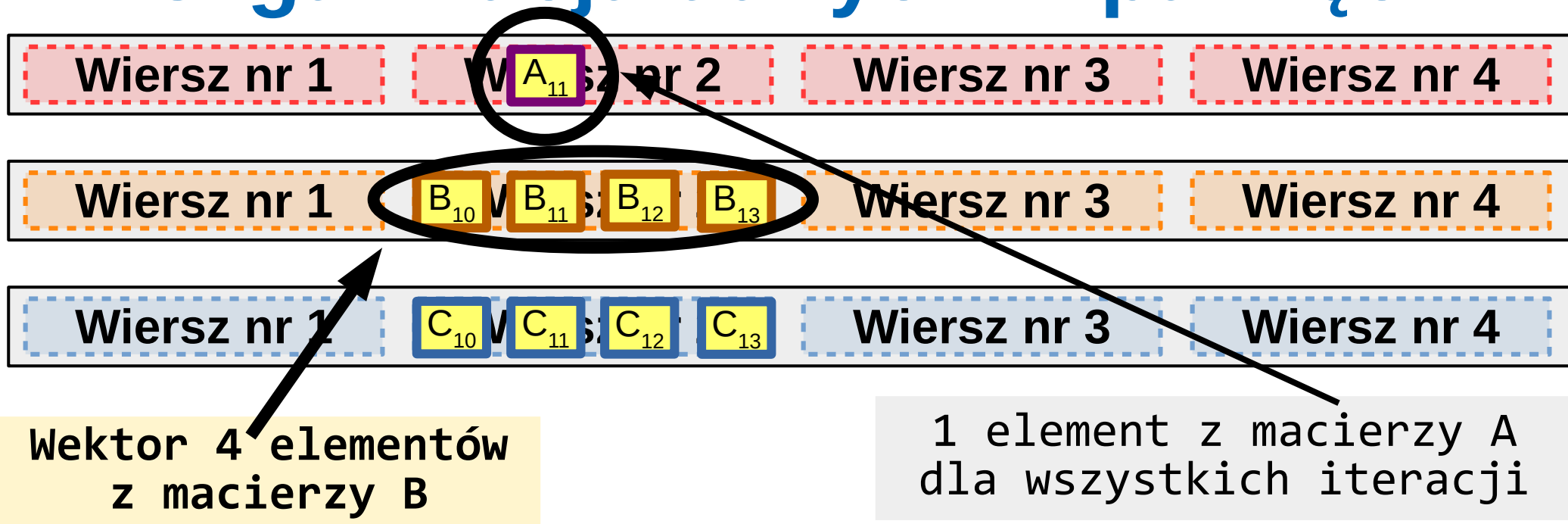
```
for(int j=0; j<n; j++)  
    c[i][j] += a[i][k]*b[k][j];
```

Organizacja danych w pamięci



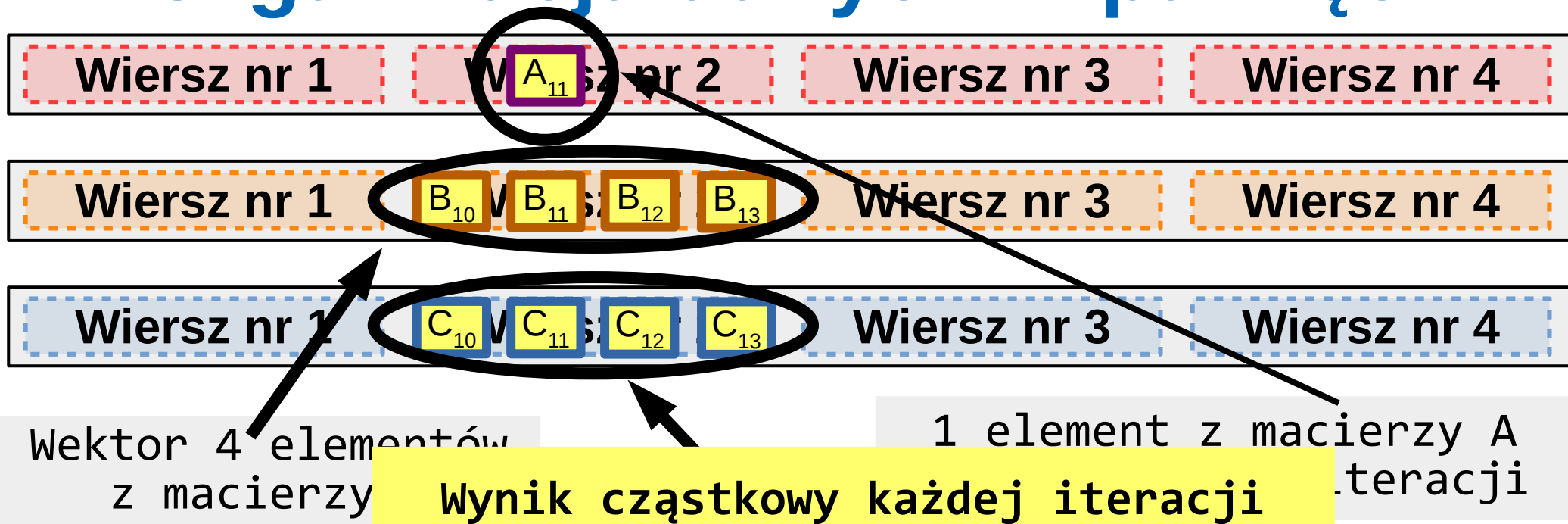
```
for(int j=0; j<n; j++)  
    c[i][j] += a[i][k]*b[k][j];
```

Organizacja danych w pamięci



```
for(int j=0; j<n; j++)  
    c[i][j] += a[i][k]*b[k][j];
```

Organizacja danych w pamięci



Wynik cząstkowy każdej iteracji jest zapisywany do własnego elementu wektora macierzy C

```
for(int j=0; j<n; j++)  
    c[i][j] += a[i][k]*b[k][j];
```

Wyniki wydajnościowe

- Wyniki uzyskane dla rozmiaru macierzy 2048x2048 oraz pojedynczej precyzji obliczeń

Wersja	Rdzenie	SIMD	Czas [s]	Przyśpieszenie
Niezmodyfikowana (ijk)	1	--	34.17	--
Niezmodyfikowana (ijk)	18	--	2.03	16.77
Zmodyfikowana (ikj)	1	OFF	5.17	6.61

Intel Xeon Gold 6240, 18 rdzeni, AVX-512
G++ 9.2, Flagi: -O3 -mavx512f -mavx512cd

Wyniki wydajnościowe

- Wyniki uzyskane dla rozmiaru macierzy 2048x2048 oraz pojedynczej precyzji obliczeń

Wersja	Rdzenie	SIMD	Czas [s]	Przyśpieszenie
Zmodyfikowana (ikj)	1	OFF	5.17	--
Zmodyfikowana (ikj)	1	AVX-512	1.20	4.29
Zmodyfikowana (ikj)	18	OFF	0.33	15.59
Zmodyfikowana (ikj)	18	AVX-512	0.09	57.62

Intel Xeon Gold 6240, 18 rdzeni, AVX-512
G++ 9.2, Flagi: -O3 -mavx512f -mavx512cd



Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyższego

**Regionalna Inicjatywa Doskonałości w Dyscyplinach
Informatyki, Elektrotechniki, Elektroniki, Automatyki i Robotyki
na Politechnice Częstochowskiej**



Projekt w ramach programu Regionalna Inicjatywa Doskonałości, decyzja nr 020/RID/2018/19

Dziękuję za uwagę!