

# Metody minimalizacji automatów kwantowych

mgr inż. Olga Siedlecka  
promotor: prof. dr hab. Sergiy Kryvyy

Instytut Informatyki Teoretycznej i Stosowanej  
Politechnika Częstochowska

# Plan prezentacji

- Motywacja
- Podstawowe pojęcia
- Automaty kwantowe
- Podsumowanie
- Cel pracy

# Motywacja

Jedną z podstaw informatyki teoretycznej, czy to klasycznej, czy kwantowej, stanowi teoria automatów i języków formalnych. Na bazie tychże automatów można analizować i projektować systemy informatyczne, kompilatory czy algorytmy.

W wypadku komputerów kwantowych jest to dziedzina formująca się, a jednym z tematów, który według mojej aktualnej wiedzy nie został jeszcze rozwinięty, jest minimalizacja automatów kwantowych. Wprowadzenie minimalizacji w wypadku automatów kwantowych zmniejszyłoby zasobochłonność istniejących algorytmów kwantowych i ułatwiłoby optymalne projektowanie kolejnych.

# Podstawowe pojęcia:

## Mechanika kwantowa [1]

- W mechanice kwantowej stan  $n$ -poziomowego układu jest reprezentowany przez wektor jednostkowy w  $n$ -wymiarowej zespolonej przestrzeni wektorowej  $H_n$ , którą nazywamy **przestrzenią stanów** układu. Wybierzmy w przestrzeni stanów  $H_n$  bazę ortonormalną  $\{|\mathbf{x}_1\rangle, |\mathbf{x}_2\rangle, \dots, |\mathbf{x}_n\rangle\}$ . Wektory bazowe  $|\mathbf{x}_i\rangle$  nazywamy **stanami bazowymi**.
- Dowolny stan układu kwantowego można przedstawić w postaci **superpozycji** stanów bazowych:

$$\alpha_1|\mathbf{x}_1\rangle + \alpha_2|\mathbf{x}_2\rangle + \dots + \alpha_n|\mathbf{x}_n\rangle \quad (1)$$

gdzie  $\alpha_i$  są liczbami zespolonymi nazywanymi **amplitudami prawdopodobieństwa** względem wybranej bazy.

# Podstawowe pojęcia:

## Mechanika kwantowa [2]

- Warunek unormowania wektora stanu wymaga, by spełniały one równanie  $|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \dots + |\alpha_n|^2 = 1$ . Prawdopodobieństwo zaobserwowania własności  $x_i$  wynosi  $|\alpha_i|^2$ .
- Jeżeli dwa układy kwantowe są opisywane za pomocą przestrzeni stanów  $H_n$  i  $H_m$ , to przestrzeń stanów układu złożonego opisana jest przez iloczyn tensorowy  $H_n \otimes H_m$ .
- Ewolucja czasowa układów kwantowych jest opisana za pomocą macierzy unitarnych.
- Stan układu dwóch qubitów  $\mathbf{z} \in H_4$  jest **rozkładalny**, jeżeli można go przedstawić za pomocą w postaci iloczynu tensorowego stanów z przestrzeni  $H_2$ ,  $\mathbf{z} = \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}$ . Stan, który nie jest rozkładalny, jest **splątany**.
- Postulat rzutowania: po dokonaniu pomiaru układ znajduje się w jednym ze swoich stanów bazowych.

# Podstawowe pojęcia:

## Deterministyczny automat skończony

**Deterministycznym automatem skończonym** - nazywamy piątkę

$$DFA = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}, \quad (2)$$

gdzie:

- $Q$  - skończony zbiór stanów,  $\#Q < \infty$ ,
- $\Sigma$  - alfabet wejściowy,
- $\delta$  - funkcja przejść  $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \mapsto Q$ ,
- $q_0 \in Q$  - stan początkowy,
- $F \subseteq Q$  - zbiór stanów końcowych (akceptowalnych).

# Podstawowe pojęcia:

## Przykład DFA

Przykład deterministycznego automatu skończonego:

$DFA = \{Q, \Sigma, \delta, q, F\}$ , gdzie:

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$  - skończony zbiór stanów,

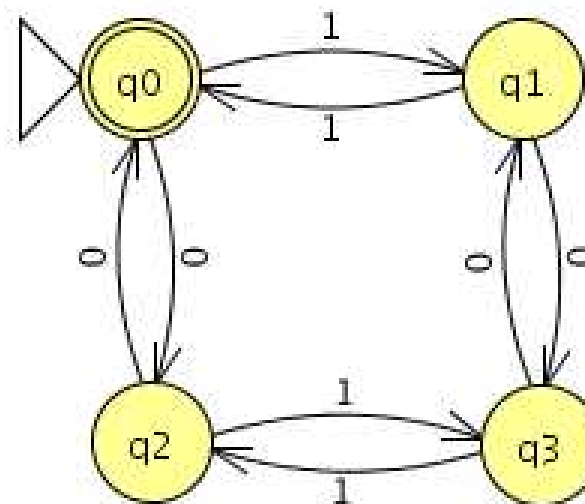
$\Sigma = \{0, 1\}$  - alfabet wejściowy,

$q = q_0$  - stan początkowy,

$F = \{q_0\}$  - zbiór stanów końcowych (akceptowalnych)

$\delta$  - funkcja przejść:

| $Q \setminus \Sigma$ | 0     | 1     |
|----------------------|-------|-------|
| $q_0$                | $q_2$ | $q_1$ |
| $q_1$                | $q_3$ | $q_0$ |
| $q_2$                | $q_0$ | $q_3$ |
| $q_3$                | $q_1$ | $q_2$ |



# Podstawowe pojęcia:

## Język akceptowany przez FA

Jeżeli  $DFA = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$  jest deterministycznym automatem skończonym, to:

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q_0, w) \in F\} \quad (3)$$

jest językiem akceptowanym przez ten automat.

Język akceptowany przez automat skończony jest regularny.

# Podstawowe pojęcia:

## Minimalizacja DFA [1]

Automat  $A$  rozpoznający język  $L$  nazywamy **minimalnym**, gdy nie istnieje automat o mniejszej liczbie stanów rozpoznający  $L$ .

Algorytm minimalizacji deterministycznego automatu skończonego polega na:

- wyeliminowaniu stanów nieosiągalnych,
- złączeniu stanów nierozróżnialnych.

# Podstawowe pojęcia:

## Minimalizacja DFA [2]

Dla automatu:  $DFA = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$

$Q = \{A, B, C, D, E, F, G\}$  - skończony zbiór stanów,

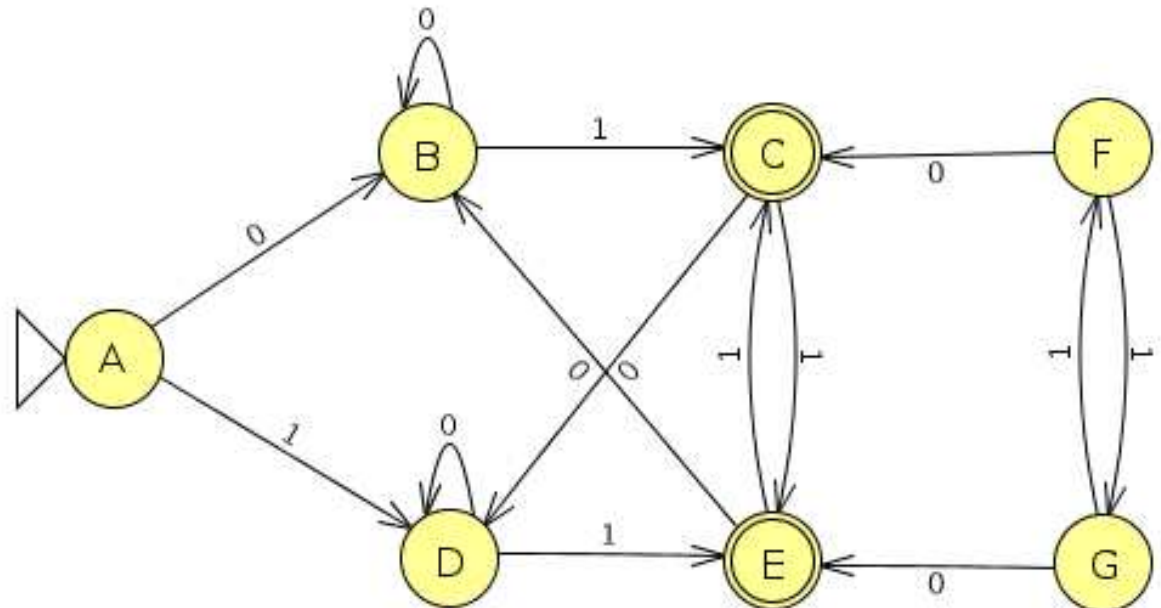
$\Sigma = \{0, 1\}$  - zbiór symboli terminalnych (alfabet wejściowy),

$q_0 = A$  - stan początkowy,

$F = \{C, E\}$  - zbiór stanów końcowych (akceptowalnych)

$\delta$  - funkcja przejść:

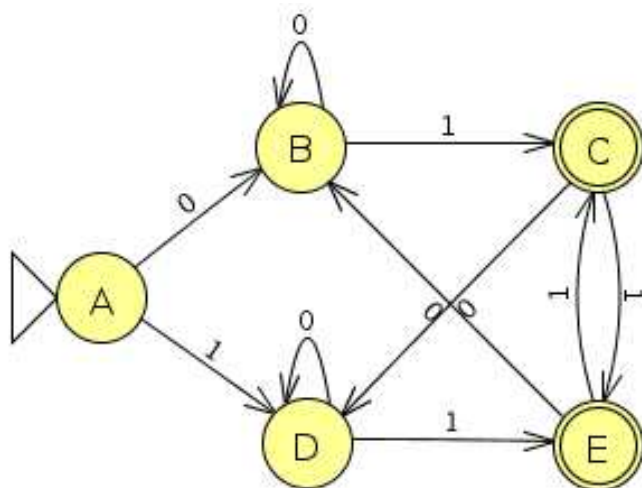
| $Q \setminus \Sigma$ | 0 | 1 |
|----------------------|---|---|
| A                    | B | D |
| B                    | B | C |
| C                    | D | B |
| D                    | D | E |
| E                    | B | C |
| F                    | C | G |
| G                    | E | F |



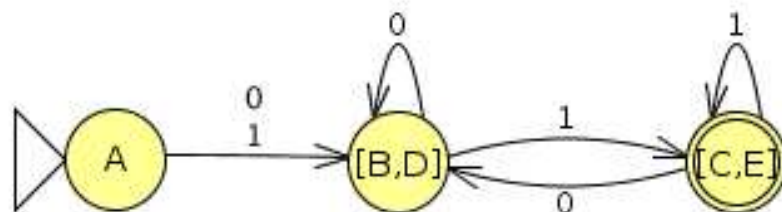
# Podstawowe pojęcia:

## Minimalizacja DFA [3]

- Wyeliminowanie stanów nieosiągalnych:



- Złączenie stanów nierozróżnialnych:



# Podstawowe pojęcia:

## Automat dwukierunkowy

**Automat dwukierunkowy** (z taśmą, maszyna Turinga tylko do odczytu):

$$2DFA = \{Q, \Sigma, D, \delta, q_0, F\}, \quad (4)$$

gdzie:

- $Q$  - skończony zbiór stanów,  $\#Q < \infty$ ,
- $\Sigma$  - alfabet wejściowy,
- $D$  - kierunki przesunięcia po taśmie  $D = \{-1, 0, 1\}$ ,
- $\delta$  - funkcja przejść  $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \mapsto Q \times D$ ,
- $q_0 \in Q$  - stan początkowy,
- $F \subseteq Q$  - zbiór stanów końcowych (akceptowalnych).

# Automat kwantowy:

Cris Moore, James Crutchfield

**Kwantowy automat** definiujemy jako:

$$QA = \{H, \Sigma, U_\sigma, \langle s_0|, F, P\}, \quad (5)$$

gdzie:

- $H$  - przestrzeń Hilberta,
- $\Sigma$  - alfabet wejściowy,
- $U_\sigma$  - unitarna macierz przejść  $U_\sigma : H \mapsto H$  dla każdego symbolu  $\sigma \in \Sigma$ ,
- $\langle s_0| \in H$  - stan początkowy, spełniający warunek  $\|s_0\|^2 = 1$ ,
- $F \subseteq H$  - podprzestrzeń stanów akceptowalnych.
- $P$  - operator  $P : H \mapsto F$

# Język kwantowy

**Język kwantowy** określa jakie jest prawdopodobieństwo zaobserwowania danego słowa:

$$QL : \Sigma^* \mapsto [1, 0]. \quad (6)$$

Jeżeli unitarna macierz przejść dla całego słowa  $U_w$  będzie równa:

$$U_w = U_{w_1} U_{w_2} \dots U_{w_{|w|}} \quad (7)$$

wtedy język akceptowany przez kwantowy automat jest funkcją:

$$f_{QA}(w) = ||s_0 U_w P||^2. \quad (8)$$

**Kwantowy automat skończony (QFA)** to taki, w którym  $H$ ,  $|s_0\rangle$ , i  $U_\sigma$  mają skończony wymiar  $n$ . Język rozpoznawany przez kwantowy automat skończony nazywamy kwantowym językiem regularnym.

# Przykład QFA

Przykład skończonego automatu kwantowego:

$QFA = \{H, \Sigma, U_\sigma, \langle s_0 |, F, P\}$ , gdzie:

$H = H_2$  - dwuwymiarowa przestrzeń stanów,

$\Sigma = \{a\}$  - alfabet wejściowy,

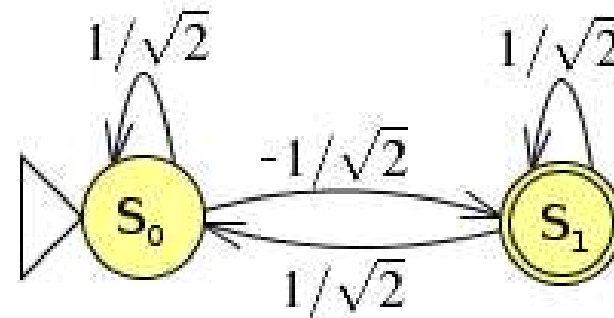
$\langle s_0 |$  - stan początkowy,

$\langle s_1 | \in F$  - stan końcowy (akceptowalny)

$P$  - operator  $P : H \mapsto F$

$U_\sigma = U_a$  - macierz przejść:

$$U_a = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad U_{aa} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$



# Automat kwantowy:

Attila Kondacs, John Watrous

Dwukierunkowy skończony automat kwantowy definiujemy jako:

$$2QFA = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, Q_{acc}, Q_{rej}\}, \quad (9)$$

gdzie:

- $Q$  - skończony zbiór stanów,
- $\Sigma$  - alfabet wejściowy,
- $\delta$  - funkcja przejść,
- $q_0 \in Q$  - stan początkowy,
- $Q_{acc} \subset Q$  - zbiór stanów akceptowalnych,
- $Q_{rej} \subset Q$  - zbiór stanów odrzucających.

# Automat kwantowy:

Attila Kondacs, John Watrous

- Definiujemy także  $Q_{non} = Q \setminus (Q_{acc} \cup Q_{rej})$  - stanów nie będących końcowymi, oraz symbole  $\ell$  i  $\wp$  oznaczające lewy i prawy koniec słowa wejściowego, stąd alfabet na którym operuje automat ma postać  $\Gamma = \Sigma \cup \{\ell, \wp\}$ .
- Funkcja przejść jest odwzorowaniem:  $\delta : Q \times \Gamma \times Q \times \{-1, 0, 1\} \mapsto \mathbb{C}$ .

Dla danego słowa  $w \in \Sigma^*$ , definiujemy taśmę o długości  $|w| + 2$ . Mówimy, że automat 2QFA jest uruchomiony dla wejściowego słowa  $w$ , jeżeli taśma jest opisana przez  $x_w$  ( $x_w(0) = \ell, x_w(i) = w_i, x_w(|w| + 1) = \wp$ ), obliczenia rozpoczynają się w stanie superpozycji  $|q_0, 0\rangle$  i po każdym kroku następuje obserwacja. Obliczenia są kontynuowane dopóki automat nie znajdzie się w stanie akceptowalnym lub odrzucającym. Język rozpoznawany przez 2QFA to taki, dla którego automat kwantowy, po przeczytaniu każdego słowa należącego do tego języka, znajduje się w stanie akceptowalnym z prawdopodobieństwem wyższym niż  $1/2$ .

# Podsumowanie

- Istniejące algorytmy kwantowe są zasobożłonne.
- Istniejące definicje automatów kwantowych można podzielić na dwa różne podejścia.
- Nie istnieją algorytmy minimalizacji automatów kwantowych.

?

- Jak rozumieć minimalizację automatu kwantowego?
- Czy takowa ma sens?

# Cel pracy

- Opracowanie metod minimalizacji automatu kwantowego w zależności od jego rodzaju.
  - poprzez zmniejszenie wymiaru przestrzeni Hilberta (przestrzeni stanów)
  - zdefiniowanie stanów i klas nierozróżnialnych (poprzez przedziały prawdopodobieństwa)
  - zdefiniowanie stanów nieosiągalnych
- Zastosowanie ich dla automatu zbudowanego dla jednego z popularnych algorytmów kwantowych.