

Automaty probabilistyczne i języki przez nie akceptowane

mgr inż. Olga Siedlecka

Zakład Informatyki Stosowanej i Inżynierii Oprogramowania
Instytut Informatyki Teoretycznej i Stosowanej
Politechnika Częstochowska

4 czerwca 2007



Plan seminarium

- Wstęp
- Definicje pomocnicze
- Niedeterministyczny automat skończony
- Relacje bisymulacji i nierozróżnialności
- Łańcuchy Markowa
- Automaty probabilistyczne
- Języki akceptowane przez automaty probabilistyczne
- Minimalizacja automatu probabilistycznego
- Odwracalne automaty probabilistyczne
- Wnioski



Wstęp

- Związek automatów niedeterministycznych, probabilistycznych i kwantowych.
- Zastosowanie automatów probabilistycznych.
- Różnorodność definicji i typów automatów probabilistycznych i kwantowych.
- Minimalizacja automatów a relacja bisymulacji.
- Klasy języków akceptowanych przez automaty.

Rozkład prawdopodobieństwa [1]

Definicja (Prawdopodobieństwo)

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną, gdzie Ω jest skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych, $\mathcal{F}$ - przeliczalnie addytywnym ciałem zdarzeń, zaś P miarą probabilistyczną (rozkładem prawdopodobieństwa) $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$ spełniającą warunki:

$$P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1, \quad P(A) \geq 0, \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i), \quad (1)$$

dla $A \in \Omega$, gdzie zbiory A_i są parami rozłączne:

jeżeli $i \neq j$ to $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Rozkład prawdopodobieństwa [2]

Definicja (Dyskretny rozkład prawdopodobieństwa)

Dyskretny rozkład prawdopodobieństwa: rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej $X : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$, przyjmującej rzeczywiste wartości x_i z co najwyżej przeliczalnego zbioru $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$, z prawdopodobieństwami $P(X = x_i) = p_i$, przy spełnionym warunku $\sum_i p_i = 1$.

Definicja (Jednopunktowy rozkład prawdopodobieństwa)

Jednopunktowy rozkład prawdopodobieństwa: rozkład prawdopodobieństwa dyskretnej zmiennej losowej X , przyjmującej wartość $P_x^1 = 1$ dla jednego punktu x , dla pozostałych punktów przyjmując wartość zero.

Rozkład prawdopodobieństwa [3]

Notacja

Jeżeli P jest rozkładem prawdopodobieństwa na Ω możemy użyć zapisu:

$$P[X] = \sum_{x \in X} P(x) \quad \text{gdzie} \quad X \subseteq \Omega. \quad (2)$$

Definicja (Iloczyn prawdopodobieństw)

Niech $\mathcal{D}(\Omega)$ będzie zbiorem wszystkich dyskretnych rozkładów prawdopodobieństwa na zbiorze Ω .

$P_1 \in \mathcal{D}(S)$, $P_2 \in \mathcal{D}(T)$ są rozkładami prawdopodobieństwa, wówczas $P_1 \times P_2$ jest rozkładem prawdopodobieństwa na $S \times T$, zdefiniowanego przez $(P_1 \times P_2)(s, t) = P_1(s) \cdot P_2(t)$ dla $(s, t) \in S \times T$.

Relacje równoważności

Definicja (Relacja równoważności)

Niech R będzie relacją równoważności na zbiorze S , zaś $P_1, P_2 \in \mathcal{D}(S)$ będą rozkładami prawdopodobieństw. Wówczas:

$$P_1 \equiv_R P_2 \iff \forall C \in S/R : P_1[C] = P_2[C], \quad (3)$$

gdzie C jest klasą abstrakcji.

Definicja (Relacja równoważności)

Niech R będzie relacją równoważności na zbiorze S , A będzie zbiorem, zaś $P_1, P_2 \in \mathcal{D}(S)$ będą rozkładami prawdopodobieństw. Wówczas:

$$P_1 \equiv_{R,A} P_2 \iff \forall C \in S/R, \forall a \in A : P_1[a, C] = P_2[a, C], \quad (4)$$

[3]

Niedeterministyczny automat skończony

Definicja (NFA)

Niedeterministycznym automatem skończonym - nazywamy piątkę

$NFA = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, gdzie:

- Q - skończony zbiór stanów, $\#Q < \infty$,
- Σ - alfabet wejściowy,
- δ - funkcja przejść $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \mapsto 2^Q$,
- $q_0 \in Q$ - stan początkowy,
- $F \subseteq Q$ - zbiór stanów końcowych (akceptowalnych).

Jeżeli $NFA = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ jest niedeterministycznym automatem skończonym, to: $L(A) = \{w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$ jest językiem akceptowanym przez ten automat. Języki akceptowane przez automaty skończone nazywamy regularnymi.

Przykład NFA

Przykład

Przykład niedeterministycznego automatu skończonego:

$NFA = (Q, \Sigma, \delta, q, F)$, gdzie:

$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ - skończony zbiór stanów,

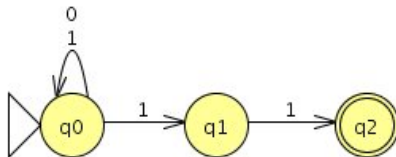
$\Sigma = \{0, 1\}$ - alfabet wejściowy,

$q = q_0$ - stan początkowy,

$F = \{q_2\}$ - zbiór stanów końcowych (akceptowalnych)

Funkcja przejść

$Q \setminus \Sigma$	0	1
q_0	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$



Relacja bisymulacji

Definicja (Bisymulacja)

Mając dwa niedeterministyczne automaty skończone $A_1 = (S, \Sigma, \delta)$ i $A_2 = (T, \Sigma, \delta)$, możemy określić **relację bisymulacji** $R \subseteq S \times T$, jeżeli dla wszystkich par $(s, t) \in R$ i dla wszystkich $\sigma \in \Sigma$ zachodzi:

- jeżeli $\delta(s, \sigma) = s'$ wtedy istnieje $t' \in T$, takie że $\delta(t, \sigma) = t'$ i $(s', t') \in R$, oraz
- jeżeli $\delta(t, \sigma) = t'$ wtedy istnieje $s' \in S$, takie że $\delta(s, \sigma) = s'$ i $(s', t') \in R$.

Stany s, t nazywamy bisymilarnymi, co zapisujemy $s \approx t$, jeżeli istnieje relacja bisymulacji R , taka że $(s, t) \in R$.

[3]

Relacja nierozróżnialności

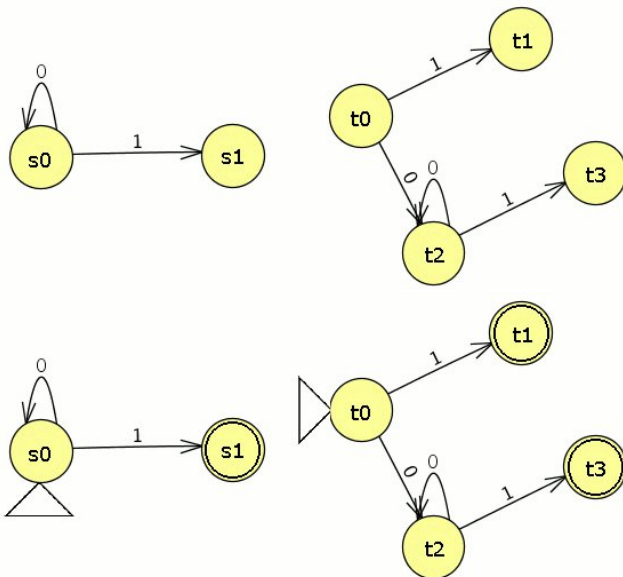
Definicja (Nierozróżnialność)

Mając dwa niedeterministyczne automaty skończone $A_1 = (S, \Sigma, \delta, s_0, F_S)$ i $A_2 = (T, \Sigma, \delta, t_0, F_T)$, możemy określić **relację nierozróżnialności** $N \subseteq S \times T$, jeżeli dla wszystkich par $(s, t) \in N$ i dla wszystkich $\sigma \in \Sigma$ zachodzi:

- $(s, t) \in N^0$, wtedy i tylko wtedy, gdy $(s \in F_S \wedge t \in F_T) \vee (s \notin F_S \wedge t \notin F_T)$
- $(s, t) \in N^k$, wtedy i tylko wtedy, gdy $(s, t) \in N^{k-1}$ oraz:
 - jeżeli $\delta(s, \sigma) = s'$ wtedy istnieje $t' \in T$, takie że $\delta(t, \sigma) = t'$ i $(s', t') \in N^{k-1}$, oraz
 - jeżeli $\delta(t, \sigma) = t'$ wtedy istnieje $s' \in S$, takie że $\delta(s, \sigma) = s'$ i $(s', t') \in N^{k-1}$.

Przy czym dla $n = |Q|$, zachodzi $N \subseteq N^{n-2} \subseteq N^{n-3} \subseteq \dots \subseteq N^1 \subseteq N^0$.

Relacja bisymulacji a relacja nierozróżnialności



Łańcuch Markowa

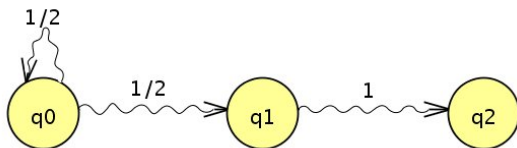
Definicja

Łańcuch Markowa - to para $MC = (Q, \delta)$, w której:

- Q - skończony zbiór stanów, $\#Q < \infty$,
- δ - funkcja przejść $\delta : Q \mapsto \mathcal{D}(Q)$,

Notacja

Jeżeli $q \in Q$ i $\delta(q) = P$ z $P(s') = p > 0$, wtedy mówimy, że łańcuch Markowa przechodzi ze stanu s do stanu s' z prawdopodobieństwem p , co jest zapisywane na wiele sposobów: $s \rightsquigarrow P$, $s \overset{p}{\rightsquigarrow} s'$, $\delta(s) = P(s)$, $\delta(s)(s') = p$.

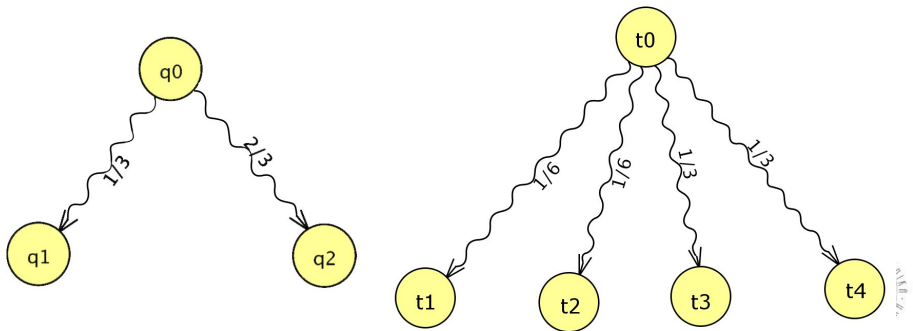


Relacja bisymulacji stanów łańcuchów Markowa

Definicja

Relacja równoważności na zbiorze stanów Q łańcucha Markowa (Q, δ) będzie relacją bisymulacji wtedy i tylko wtedy, gdy: $\forall (q, t) \in R$:

$$\delta(q) = P_1, \text{ wtedy istnieje } \delta(t) = P_2 \text{ takie, że } P_1 \equiv_R P_2. \quad (5)$$



Typy automatów probabilistycznych

- automaty reaktywne
- automaty generatywne
- automaty $I \backslash O$
- automaty Vardi'ego
- automaty przemienne Hansson'a
- automaty Segala
- automaty łączone
- automaty Pnueli'ego-Zuck'a

Definicja automatu probabilistycznego

Definicja (PA)

Automat probabilistyczny - to trójka $PA = (Q, \Sigma, \delta)$, w której:

- Q - skończony zbiór stanów, $\#Q < \infty$,
- Σ - alfabet wejściowy,
- δ - funkcja prawdopodobieństwa przejść $\delta : Q \times \{\Sigma \cup \{\varepsilon\}\} \mapsto \mathcal{D}(Q)$.

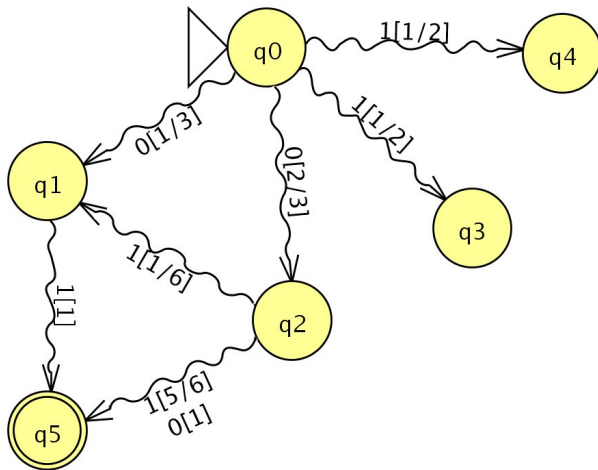
Definicja (PA)

Inicjalny automat probabilistyczny ze stanami końcowymi - to piątka

$PA = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, w której:

- Q, Σ, δ - zdefiniowane są jw.,
- $q_0 \in Q$ - stan początkowy,
- $F \subseteq Q$ - zbiór stanów końcowych (akceptowalnych).

Przykład PA

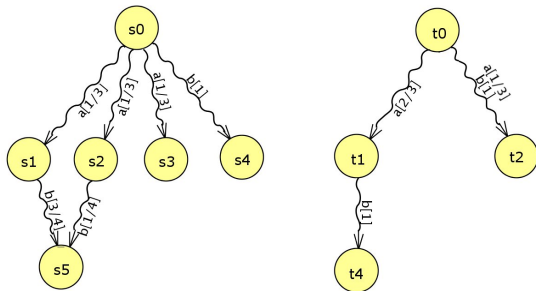


Relacja bisymulacji PA

Definicja (Bisymulacja stanów PA)

Mając dwa probabilistyczne automaty skończone $PA_1 = (S, \Sigma, \delta)$ i $PA_2 = (T, \Sigma, \delta)$, możemy określić **relację bisymulacji** $R \subseteq S \times T$, jeżeli dla wszystkich par $(s, t) \in R$ i dla wszystkich $\sigma \in \Sigma$ zachodzi:

- jeżeli $\delta(s, \sigma) = P_1$ wtedy istnieje rozkład P_2 taki, że $t' \in T$, takie że $\delta(t, \sigma) = P_2$ i $P_1 \equiv_{R, \Sigma} P_2$. [3]



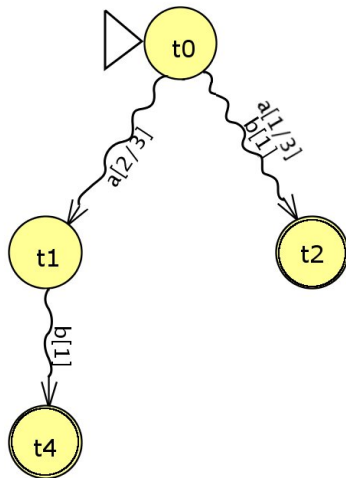
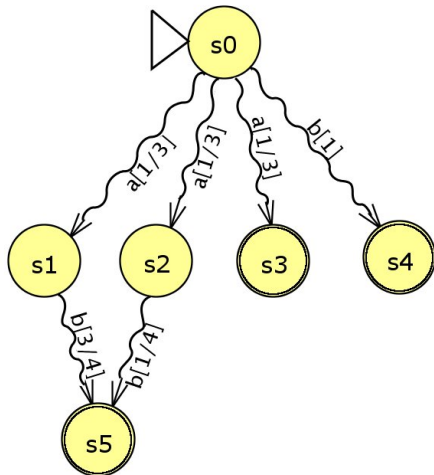
Relacja nierozróżnialności PA [1]

Definicja (Nierozróżnialność stanów PA)

Mając dwa probabilistyczne automaty skończone $PA_1 = (S, \Sigma, \delta, s_0, F_S)$ i $PA_2 = (T, \Sigma, \delta, t_0, F_T)$, możemy określić **relację nierozróżnialności** $N \subseteq S \times T$, jeżeli dla wszystkich par $(s, t) \in N$ i dla wszystkich $\sigma \in \Sigma$ zachodzi:

- $(s, t) \in N^0$, wtedy i tylko wtedy, gdy $(s \in F_S \wedge t \in F_T) \vee (s \notin F_S \wedge t \notin F_T)$
- $(s, t) \in N^k$, wtedy i tylko wtedy, gdy $(s, t) \in N^{k-1}$ oraz
 - jeżeli $\delta(s, \sigma) = P_1$ wtedy istnieje rozkład P_2 taki, że $t' \in T$, takie że $\delta(t, \sigma) = P_2$ i $P_1 \equiv_{R, \Sigma} P_2$.

Relacja nierozróżnialności PA [2]



Język akceptowany przez automat probabilistyczny

Notacja

Prawdopodobieństwo przejścia ze stanu q_1 do stanu q_2 po przeczytaniu symbolu σ zapisujemy jako $q_1 \xrightarrow{\sigma[p]} q_2$, lub $\delta(q_1, \sigma)(q_2) = p$. Rozszerzoną funkcję prawdopodobieństwa przejść zapisujemy jako:

$$\delta(q_1, w\sigma) = \sum_{q \in Q} \delta(q_1, w)(q) \cdot \delta(q, \sigma). \quad (6)$$

Definicja (Język akceptowany przez PA)

Język akceptowany przez automat probabilistyczny to funkcja:

$$L_{PA} : \Sigma^* \mapsto [0, 1], \quad \text{taka że: } \forall w \in \Sigma^*, L_{PA}(w) = \sum_{q \in F} \delta(q_0, w)(q). \quad (7)$$

Typy języków akceptowanych przez PA

Definicja

Mówimy, że język L jest rozpoznawany z ograniczonym błędem przez automat PA w przedziale (p_1, p_2) , jeżeli $p_1 < p_2$ oraz $p_1 = \sup\{P_w | w \notin L\}$, zaś $p_2 = \inf\{P_w | w \in L\}$

Definicja

Mówimy, że język L jest rozpoznawany z prawdopodobieństwem p , wtedy i tylko wtedy gdy jest rozpoznawany w przedziale $(1 - p, p)$.

Definicja

Mówimy, że język L jest rozpoznawany z prawdopodobieństwem $1 - \varepsilon$, wtedy i tylko wtedy gdy $\varepsilon > 0$ i istnieje automat, który rozpoznaje ten język w przedziale $(\varepsilon_1, 1 - \varepsilon_2)$, gdzie $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \leq \varepsilon$.

Minimalizacja PA [1]

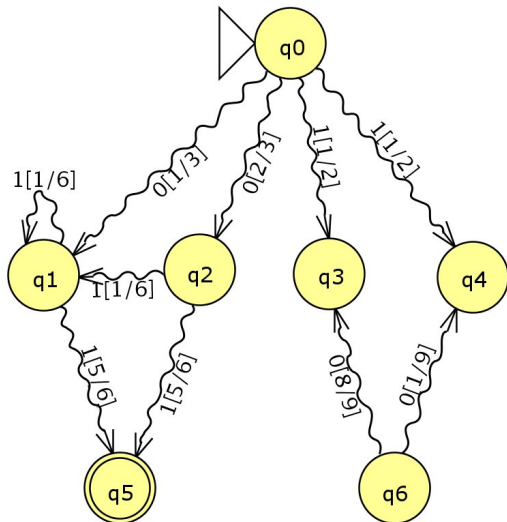
Definicja (Minimalny automat probabilistyczny)

Automat probabilistyczny $PA = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ rozpoznający język L z prawdopodobieństwem p nazywamy **minimalnym**, gdy nie istnieje automat o mniejszej liczbie stanów rozpoznający L z niemniejszym prawdopodobieństwem.

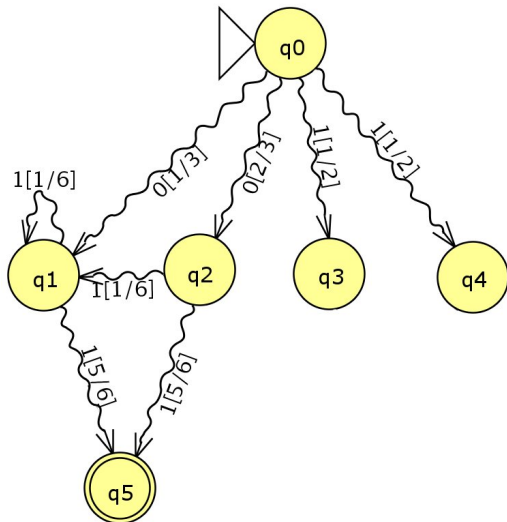
Algorytm minimalizacji automatu probabilistycznego polega na:

- wyeliminowaniu stanów nieosiągalnych (prawdopodobieństwo przejścia do tego stanu wynosi zero),
- złączeniu stanów nierozróżnialnych (przy wykorzystaniu relacji nierozróżnialności).

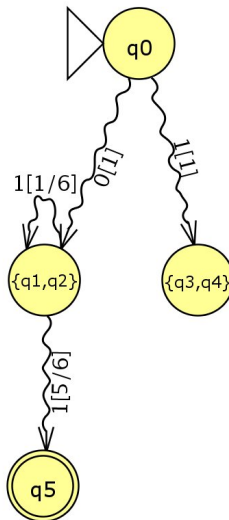
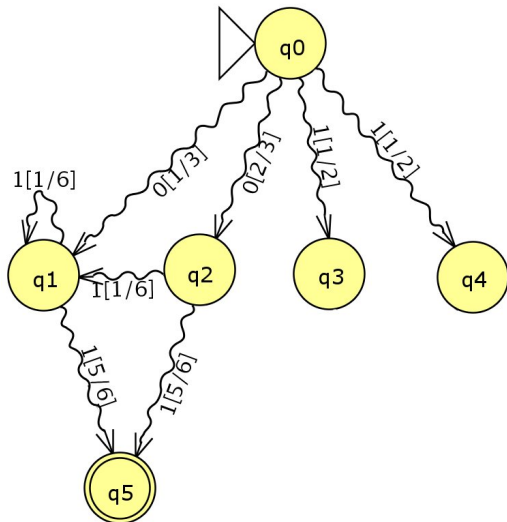
Minimalizacja PA [2]



Minimalizacja PA [3]



Minimalizacja PA [4]



Odwracalny automat probabilistyczny

Definicja (Odwracalny automat probabilistyczny)

Odwracalny automat probabilistyczny - to piątka $PRA = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

- Q - skończony zbiór stanów, $\#Q < \infty$,
- Σ - alfabet wejściowy,
- δ - funkcja prawdopodobieństwa przejść $\delta : Q \times \{\Sigma \cup \{\epsilon\}\} \mapsto \mathcal{D}(Q)$.
- $q_0 \in Q$ - stan początkowy,
- $F \subseteq Q$ - zbiór stanów końcowych (akceptowalnych).

Funkcja prawdopodobieństwa przejść spełnia następujące warunki:

$$\forall (q_1, \sigma_1) \in Q \times \Sigma \quad \sum_{q \in Q} \delta(q_1, \sigma_1)(q) = 1 \quad (8)$$

$$\forall (q_1, \sigma_1) \in Q \times \Sigma \quad \sum_{q \in Q} \delta(q, \sigma_1)(q_1) = 1 \quad (9)$$

Macierze podwójnie stochastyczne

Lemat

Dla każdego symbolu wejściowego $\sigma \in \Sigma$, funkcja prawdopodobieństwa przejść może być opisana przez macierz V_σ o rozmiarze $|Q|$ na $|Q|$, gdzie

$$(V_\sigma)_{i,j} = \delta(q_j, \sigma)(q_i). \quad (10)$$

Lemat

Wszystkie macierze V_σ są podwójnie stochastyczne jeżeli spełnione są warunki (8) i (9).

Prototyp dla podwójnie stochastycznej macierzy

Definicja

Macierz unitarna U jest prototypem dla podwójnie stochastycznej macierzy S jeżeli:

$$\forall i, j |U_{i,j}|^2 = S_{i,j}. \quad (11)$$

Twierdzenie

Jeżeli wszystkie macierze odwracalnego automatu probabilistycznego mają unitarny prototyp, możemy go symulować za pomocą automatu kwantowego.

[2]

Twierdzenie

Jeżeli wszystkie macierze przejść automatu kwantowego są unitarnym prototypem macierzy podwójnie stochastycznych, wówczas automat kwantowy możemy minimalizować jak automat probabilistyczny.

Wnioski

- Związek automatów probabilistycznych i kwantowych.
- Minimalizacja odwracalnych automatów probabilistycznych a minimalizacja automatów kwantowych.
- Inne metody minimalizacji.





CAO, Y., XIA, L., AND YING, M.

Probabilistic automata for computing with words.

ArXiv Computer Science e-prints (Apr. 2006).



GOLOVKINS, M., AND KRAVTSEV, M.

Probabilistic reversible automata and quantum automata.

Lecture Notes In Computer Science 2387 (2002), 574.



SOKOLOVA, A., AND DE VINK, E.

Probabilistic automata: System types, parallel composition and comparison.

In *Validation of Stochastic Systems: A Guide to Current Research* (2004), LNCS 2925, pp. 1–43.